

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА



Факультет  
вычислительной математики  
и кибернетики



---

Научная конференция  
**ЛОМОНОСОВСКИЕ  
ЧТЕНИЯ**

Тезисы докладов

*24 марта – 4 апреля 2025 года*

Москва

---

2025

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Научная конференция

# **Ломоносовские Чтения**

Тезисы докладов

24 марта – 4 апреля 2025 года



---

МОСКВА – 2025

УДК 519.7  
ББК 22.18  
Л75



<https://elibrary.ru/snizsa>

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета  
факультета вычислительной математики и кибернетики  
МГУ имени М. В. Ломоносова*

**Ломоносовские чтения.** Научная конференция. 24 марта – 4 апреля  
Л75 2025 г. : тезисы докладов. – Москва : Издательский отдел факультета  
ВМиК МГУ (лицензия ИД 05899 от 24.09.2001); МАКС Пресс, 2025. –  
200 с.

e-ISBN978-5-89407-648-5 (ВМК МГУ)  
ISBN 978-5-317-07378-7 («МАКС Пресс»)  
<https://doi.org/10.29003/m4389.978-5-317-07378-7>

В настоящий сборник вошли тезисы докладов секции Вычислительной математики и кибернетики конференции «Ломоносовские чтения – 2025», проводимой Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова в 2025 году.

УДК 519.7  
ББК 22.18

**Lomonosov Readings.** Scientific Conference. March 24 – April 4, 2025 :  
Abstracts. – Moscow : Publishing Department of CMC MSU (license ID  
05899 from 24.09.2001); MAKS Press, 2025. – 200 p.

e-ISBN978-5-89407-648-5 (ВМК МГУ)  
ISBN 978-5-317-07378-7 («МАКС Пресс»)  
<https://doi.org/10.29003/m4389.978-5-317-07378-7>

The collection includes report's abstracts of the Computational Mathematics and Cybernetics section of the Lomonosov Readings – 2025 conference conducted by the Moscow State University in 2025.

**e-ISBN978-5-89407-648-5**  
**978-5-317-07378-7**

© Издательский отдел факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025  
© Авторы докладов, 2025  
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2025

В соответствии с Уставом Московского университета и приказом Ректора МГУ № 173 от 20 февраля 2025 года «О проведении ежегодной научной конференции «Ломоносовские чтения» для подведения итогов деятельности научных подразделений в 2024 году, представления и обсуждения результатов научно-исследовательских работ по всем тематическим направлениям в год 270-летия Московского университета, ежегодная научная конференция «Ломоносовские чтения» пройдет на факультете вычислительной математики и кибернетики с 24 марта по 4 апреля 2025 года.

Секция вычислительной математики и кибернетики научной конференции «Ломоносовские чтения» включает следующие подсекции.

**Секция 1.** Дифференциальные уравнения

(руководитель — профессор Ломов И. С.).

**Секция 2.** Кафедра автоматизации научных исследований

(руководитель — чл.-корр. РАН, профессор Посыпкин М. А.).

**Секция 3.** Вычислительные методы

(руководитель — академик РАН, профессор Четверушкин Б. Н.).

**Секция 4.** Вычислительные технологии и моделирование

(руководитель — академик РАН, профессор Тыртышников Е. Е.).

**Секция 5.** Математическая физика

(руководитель — профессор Разгулин А. В.).

**Секция 6.** Исследование операций

(руководитель — профессор Васин А. А.).

**Секция 7.** Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов

(руководитель — чл.-корр. РАН, профессор Смелянский Р. Л.).

**Секция 8.** Теория вероятностей и математическая статистика

(руководитель — профессор Королев В. Ю.).

**Секция 9.** Интеллектуальные информационные технологии

(руководитель — профессор Машечкин И. В.).

**Секция 10.** Математическая кибернетика

(руководитель — профессор Ложкин С. А.).

**Секция 11.** Кафедры системного анализа и нелинейных динамических систем и процессов управления (соруководители — академик РАН, профессор Шананин А. А., профессор Фомичев В. В.).

**Секция 12.** Суперкомпьютеры и квантовая информатика

(руководитель — чл.-корр. РАН, профессор Воеводин В. В.).

**Секция 13.** Информационная безопасность

(руководитель — академик РАН, профессор Соколов И. А.).

**Секция 14.** Системное программирование

(руководитель — академик РАН, профессор Аветисян А. И.).

**Секция 15.** Алгоритмические языки

(соруководители — профессор Лукашевич Н. В., доцент Абрамов В. Г.).

**Секция 16.** Оптимальное управление и дифференциальные игры

(руководитель — академик РАН, профессор Осипов Ю. С.).



# Содержание

<b>Секция 1. Дифференциальные уравнения</b> . . . . .	16
<i>А. И. Аристов</i>	
Точные решения модельного нелинейного уравнения третьего порядка	16
<i>Д. П. Емельянов</i>	
О единственности решений модифицированных краевых задач для эллиптического уравнения с параболическим вырождением . . . . .	16
<i>Л. В. Крицков, Н. В. Некрасов</i>	
Спектральный анализ общих граничных задач для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией . . . . .	17
<i>Л. В. Крицков, Ю. А. Романова</i>	
Корректная разрешимость смешанных задач для эволюционного уравнения с отражением . . . . .	19
<i>А. М. Савчук, Е. Д. Кузнецов</i>	
Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля на графе–звезде с граничными условиями Дирихле . . . . .	20
<i>И. В. Садовничая, К. П. Зувев</i>	
Асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде . . . . .	22
<b>Секция 2. Кафедра автоматизации научных исследований</b> . . . . .	23
<i>Н. М. Белоусова, Е. Ю. Ечкина</i>	
Сравнительный анализ методов предиктивного анализа поиска аномалий в работе промышленного оборудования . . . . .	23
<i>П. Н. Вабищевич</i>	
Операторно-разностные схемы для системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	24
<i>И. В. Зотов, Н. С. Дементьев, А. В. Пахнушев</i>	
Исследование поведения границы плазмы в эксперименте на установке токамак в условиях формирования диверторной конфигурации . . . . .	26

<i>В. А. Жилин, А. П. Смирнов, И. В. Капырин, Д. В. Ануфриенко</i> Исследование схем семейства CWENO для дискретизации трёхмерных задач переноса на сетках со смешанным типом ячеек . . . . .	27
<i>М. В. Никонов, А. Г. Шишкин</i> Ускорение процесса обратной диффузии в задаче генеративного улучшения речи с использованием предсказательных декодеров . . . . .	28
<i>Д. Ю. Сычугов, Д. В. Рыжаков, В. Ф. Андреев, А. В. Горбунов, Н. А. Курнева</i> Численное сопровождение экспериментов на установке токамак Т-15 МД . . . . .	31
<i>А. В. Шейнов, А. Г. Шишкин</i> Распознавание почечных патологий на основе анализа изображений УЗИ . . . . .	32
<b>Секция 3. Вычислительные методы . . . . .</b>	<b>33</b>
<i>В. М. Головизнин, А. В. Сержантов</i> Схема «КАБАРЕ» для релаксационного приближения скалярных законов сохранения гиперболического типа . . . . .	33
<i>В. А. Егоренков, В. А. Трофимов</i> Достижение высокой эффективности адаптивных неотражающих искусственных краевых условий для уравнения Шредингера . . . . .	34
<i>Г. Г. Еленин, Т. Г. Еленина</i> Автоматический выбор шага в численных методах решения задачи Коши для гамильтоновых систем . . . . .	35
<i>Е. А. Леонов, С. В. Богомоллов</i> Численное решение модели реального делового цикла на основе игры среднего поля . . . . .	36
<i>А. Ю. Мокин, Н. П. Савенкова, К. Э. Сапожников, Н. Д. Ненахов</i> Математическое моделирование динамики мониторинга управляющих параметров электролиза алюминия . . . . .	37
<i>С. И. Мухин, А. Я. Буничева, Е. В. Кочетов, К. В. Радаева, Ю. М. Королев</i> Применение методов машинного обучения к реальным медицинским базам данных . . . . .	39
<i>Н. П. Савенкова, Л. А. Артемьева, А. Ю. Мокин, А. А. Дряженков</i> Математическое моделирование сценариев отключения установок производства в задаче календарного планирования . . . . .	40
<i>Н. П. Савенкова, С. А. Складчиков, В. С. Лапонин, В. В. Новодережкин, Ф. И. Высикайло</i> Влияние стекловидного тела на гидродинамические процессы в глазе человека . . . . .	41

<i>А. Б. Хруленко, Ф. Д. Попко</i> Моделирование динамики веществ по сердечно-сосудистой системе человека с учетом детоксикационной функции печени. . . . .	43
<i>И. А. Широков</i> Особенности сверхзвукового обтекания осесимметричной модели НВ-2 при больших углах атаки . . . . .	44
<i>А. В. Шобухов</i> Математическая модель диффузии в многокомпонентной жидкой смеси	46
<b>Секция 4. Вычислительные технологии и моделирование . . . . .</b>	<b>47</b>
<i>М. А. Бабенко, Н. Л. Замарашкин</i> Разработка алгоритма малой сложности канонического приближения тензоров малого ранга в задачах фильтрации шума . . . . .	48
<i>Е. Р. Гришина, М. А. Горбунов, М. В. Рахуба</i> Точная и эффективная оценка спектральной нормы сверточных слоев нейросетей . . . . .	49
<i>Мяо Цзясюань, С. А. Матвеев</i> Применения методов анализа чувствительности для анализа работы нейросетевых моделей . . . . .	50
<i>С. В. Сукманюк, Д. А. Желтков</i> Блочный обобщенный метод минимальных невязок . . . . .	52
<i>Г. М. Файкин, С. К. Шангареева, В. М. Степаненко, А. И. Медведев</i> Прототип программного кода для решения систем ОДУ моделей биогеохимических циклов в экосистемах суши . . . . .	53
<i>С. К. Шангареева, В. М. Степаненко</i> Применение методов усвоения данных для идентификации моделей углеродного цикла . . . . .	55
<b>Секция 5. Математическая физика . . . . .</b>	<b>56</b>
<i>Е. В. Андреева, Е. А. Павельева</i> Нейросетевой метод нахождения и сопоставления ключевых точек на изображениях радужной оболочки глаза . . . . .	56
<i>А. В. Баев</i> Обратные задачи для уравнений семейства КдВ и обратная задача для уравнения Гарднера . . . . .	57
<i>С. Д. Бажитов, А. В. Разгулин, А. В. Ларичев</i> Об обратной задаче численного секционирования в конфокальной оптической системе . . . . .	58



<i>С. В. Бочкарев, А. М. Денисов</i> Идентификация эволюции источника в сингулярно возмущенном уравнении теплопроводности . . . . .	59
<i>О. И. Индычко, Д. М. Коршунов, А. В. Хвостиков</i> Использование неопределенности для расширения обучающих наборов данных в задаче сегментации материалов на геологических изображениях . . . . .	60
<i>В. В. Лопушенко, Ю. А. Ерёмин</i> Сравнительный анализ подходов для учёта квантовых эффектов в плазмонных наночастицах . . . . .	62
<i>Д. Г. Тихвинский, В. А. Трофимов, М. В. Федотов</i> Математическое моделирование нелинейного одномерного уравнения Гинзбурга—Ландау . . . . .	64
<i>Д. М. Харитонов, В. А. Трофимов</i> Влияние слабой третьей гармоники на процесс удвоения частоты лазерного излучения . . . . .	65
<b>Секция 6. Исследование операций . . . . .</b>	<b>66</b>
<i>П. А. Арбузов, Д. Ю. Голембиовский</i> О сходимости алгоритма стохастического проекционного безградиентного спуска в задаче калибровки модели ARMA-GARCH базового актива по рыночным ценам опционов . . . . .	66
<i>Г. А. Белянкин, М. А. Забелло</i> Сравнительный анализ подходов машинного обучения для оценки риска падения на основе характеристик шага . . . . .	67
<i>А. А. Васин, Н. И. Цыганов</i> Оптимальное управление накопителем энергии с учетом саморазрядки	69
<i>А. А. Васин, Н. И. Цыганов, Г. А. Саносян, С. Ю. Абдулаев</i> Оценки доходности инвестиций в накопители энергии . . . . .	70
<i>А. А. Глушко, П. А. Измаилов</i> Исследование явления ложных корреляций и однозначных признаков в нейронных сетях . . . . .	71
<i>Е Цзыхао, Д. Ю. Голембиовский</i> Байесовский подход в теории портфеля . . . . .	72
<i>А. Ф. Измаилов, Янь Чжибай</i> Методы Левенберга—Марквардта и методы Ньютона с подзадачами линейного программирования для задач оптимизации с комплементарными ограничениями . . . . .	76

<i>Д. С. Куренной, А. С. Жуков</i> Адаптивный немонотонный обучающий алгоритм с ограничением на веса нейронной сети в задачах оценки кредитного риска . . . . .	78
<i>В. В. Морозов, С. И. Романов, Хуан Чжанжуньлун</i> О некоторых алгоритмах поиска минимальной системы представителей семейства подмножеств . . . . .	79
<b>Секция 7. Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов . . . . .</b>	<b>80</b>
<i>Г. С. Алексеев, Р. Л. Смелянский, Е. П. Степанов</i> Балансировка нестационарных динамических потоков данных в гетерогенных системах . . . . .	80
<i>В. В. Балашов, С. А. Мальчевский</i> Алгоритмы построения энергосберегающего многопроцессорного расписания вычислений . . . . .	82
<i>Д. Ю. Волканов, В. М. Рябченков</i> Методика тестирования сетевого процессорного устройства . . . . .	83
<i>Го Фэнжуй, В. Ю. Королев, Р. Л. Смелянский</i> Метод экспоненциально-векторной авторегрессии для прогнозирования качества канала передачи данных . . . . .	84
<i>А. М. Любимов, В. А. Антоненко</i> Исследование различных методологий выбора подхода к организации архитектуры микросервисных приложений в облачных вычислительных средах . . . . .	85
<i>А. Д. Милешин, И. К. Ильин, В. О. Писковский</i> Использование блокчейн для хранения секретов в Mesh VPN . . . . .	87
<i>А. А. Осипчук, А. П. Капитонова, Г. В. Курячий</i> Формирование специализированного образа виртуальной машины для курса «Практические аспекты сетевых протоколов в Linux» . . . . .	88
<i>И. И. Сеченых, Р. Л. Смелянский</i> Балансировка стационарных динамических потоков данных в гетерогенных системах . . . . .	90
<i>И. К. Шпигун, В. О. Писковский</i> Разработка подсистемы контроля процедурами реконфигурации в программно-конфигурируемых сетях с использованием распределенного реестра . . . . .	91

<b>Секция 8. Теория вероятностей и математическая статистика . . . . .</b>	<b>92</b>
<i>А. К. Горшенин, А. Л. Виляев</i>	
О повышении эффективности нейросетевого прогнозирования временных рядов с использованием смешанных компонент связности и модифицированной функции потерь . . . . .	92
<i>А. К. Горшенин, А. М. Достовалова</i>	
О композиции графово-сверточных нейронных сетей и квадродеревьев в задаче сегментации кораблей на радиолокационных изображениях . . . . .	93
<i>А. К. Горшенин, Ю. М. Жидкова</i>	
О построении нейросетей Колмогорова-Арнольда на вероятностном базисе . . . . .	94
<i>Т. В. Захарова, В. К. Клименко</i>	
Влияние пропуска данных на точность критерия биоэквивалентности . . . . .	95
<i>Т. В. Захарова, П. В. Панов</i>	
Анализ расхождений в распределениях характеристик препаратов при проверке биоэквивалентности . . . . .	97
<i>В. Ю. Королев, Н. Р. Романюк</i>	
О дисперсионно-сдвиговых смесях нормальных законов как стационарных распределениях стохастического разностного уравнения со случайными коэффициентами . . . . .	98
<i>А. А. Кудрявцев, О. В. Шестаков</i>	
Асимптотические свойства оценки риска при использовании непрерывных функций пороговой обработки . . . . .	100
<i>Е. В. Савушкин, Т. В. Захарова</i>	
Анализ стохастических дифференциальных уравнений в пространстве $L_p$ для $p < 2$ . . . . .	101
<i>Ю. С. Хохлов</i>	
Об одной характеристике логистического распределения . . . . .	102
<b>Секция 9. Интеллектуальные информационные технологии . . . . .</b>	<b>103</b>
<i>И. В. Машечкин, М. И. Петровский, О. Е. Горохов</i>	
Методы анализа сложно структурированных данных для решения задач информационной безопасности . . . . .	103
<i>И. В. Машечкин, М. И. Петровский, И. С. Лазухин</i>	
Методы отбора признаков для построения моделей процессов нефтепереработки с использованием глубокого обучения . . . . .	104
<i>Л. В. Пасконова, А. В. Чернов</i>	
Исследование и разработка векторного представления для задачи разметки программного кода . . . . .	106

<i>М. И. Петровский, Ю. А. Васильев, М. В. Говердовский</i> Исследование и разработка time-varying моделей для оценки деградации жестких дисков . . . . .	107
<i>А. П. Рыжов, Р. А. Двоеглазов</i> Индекс экологического благополучия на основе открытых данных и нечёткой логики . . . . .	108
<i>И. А. Шергин, А. П. Рыжов</i> Система контроля выполнения физических упражнений средствами гибридного интеллекта: признаки динамики . . . . .	109
<b>Секция 10. Математическая кибернетика . . . . .</b>	<b>110</b>
<i>С. А. Ложкин, М. Д. Сергеев</i> Уточненные оценки функции Шеннона для глубины булевых функций	110
<i>В. С. Шагов, В. В. Подымов</i> О проверке эквивалентности простых программ над двоичными деревьями . . . . .	112
<b>Секция 11. Кафедры системного анализа и нелинейных динамических систем и процессов управления . . . . .</b>	<b>113</b>
<i>А. В. Арутюнов, О. А. Васянин</i> Точки совпадения двух отображений при равенстве констант накрывания и Липшица . . . . .	113
<i>Р. Р. Бегиев, А. В. Ильин</i> Об использовании механизма внимания в многоагентных системах . . . . .	115
<i>З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский</i> Обобщенные седловые точки и их устойчивость . . . . .	116
<i>М. А. Каменщиков</i> О задаче субоптимальной фильтрации для гибридных систем . . . . .	117
<i>Г. С. Парастаев, А. А. Шананин</i> Мажоризация по Лоренцу в модели Рамсея-Бьюли . . . . .	118
<i>А. А. Рыбакова, Н. К. Обросова</i> Сравнительный анализ крупных мировых экономик с помощью моделей межотраслевого баланса с учетом замещения производственных факторов . . . . .	120
<i>В. В. Фомичев, Н. И. Денисова</i> Задача построения приближенных функциональных наблюдателей . . . . .	122
<i>В. В. Фомичев, К. Ю. Шутова</i> О равномерном размещении агентов в ограниченной области . . . . .	123

<i>А. С. Фурсов, П. А. Крылов</i>	
О показателе состоятельности кусочно-линейной аппроксимации нелинейной аффинной системы . . . . .	125
<i>Chen Jiulong, S. N. Smirnov</i>	
Consensus Ranking of Universities: A Numerical Experiment . . . . .	126
<i>А. М. Чебанова, Н. К. Обросова</i>	
Приложение нелинейной модели межотраслевого баланса для анализа агрегированной структуры затраты-выпуск российской экономики . . . . .	128
<b>Секция 12. Суперкомпьютеры и квантовая информатика . . . . .</b>	<b>129</b>
<i>Р. М. Куприй, К. А. Жуков, Б. И. Краснополяский</i>	
Повышение производительности итерационных методов решения систем уравнений на графических ускорителях . . . . .	130
<i>А. Д. Матвеев, К. А. Жуков, Б. И. Краснополяский</i>	
Оптимизация параллельного алгоритма умножения разреженных матриц . . . . .	131
<i>И. М. Никольский</i>	
О фильтрации трёхмерных сканированных изображений лесных деревьев . . . . .	132
<i>А. В. Русол, И. В. Маркин</i>	
Моделированию освещенности поверхности космических объектов на современных высокопроизводительных архитектурах . . . . .	133
<i>Д. Юань, К. А. Жуков</i>	
Реализация псевдоспектрального метода для уравнения генерации магнитного поля на нескольких графических ускорителях . . . . .	134
<b>Секция 13. Информационная безопасность . . . . .</b>	<b>136</b>
<i>Ю. А. Задорожная, Б. М. Нутфуллин, Л. В. Дмитриев</i>	
Разработка программного комплекса для оценки робастности мультимодальных больших языковых моделей . . . . .	136
<i>Е. А. Ильюшин, В. Е. Ломоносова</i>	
Повышение робастности методов машинного обучения для обнаружения мошенничества в банковских транзакциях . . . . .	138
<i>И. В. Лысаков, Э. А. Применко</i>	
Поиск ближайшего вектора в целочисленных решетках с помощью метода квантового отжига . . . . .	139
<i>А. В. Ситников, А. А. Петухов</i>	
Извлечение шаблонов HTTP-запросов из мобильных приложений методом статического анализа . . . . .	140

*И. В. Чижов*

О связи задачи перестановочной эквивалентности линейных кодов и задачи линейной эквивалентности подпространств квадратичных форм 142

**Секция 14. Системное программирование . . . . . 143**

*В. Т. Абдрахманова, Л. С. Корухова, К. С. Сорокин*

Роль внедрения тестовых результатов в задаче исправления ошибок в исходном коде с использованием больших языковых моделей . . . . 143

*А. И. Аветисян, Г. М. Калинин, И. В. Богомолов*

Оптимизация инструмента автоматической балансировки виртуальных машин между разными серверами . . . . . 145

*А. А. Белеванцев, А. Л. Галустов, А. Е. Бородин*

Статический анализ языка Python с разрешением косвенных вызовов 146

*С. С. Гайсарян, А. А. Акопян, Ш. Ф. Курмангалеев, П. А. Санкина*

Статический анализ, использующий собранные при фаззинге данные 148

*С. С. Гайсарян, Ф. Х. Гайфутдинова, В. В. Акользин, Ш. Ф. Курмангалеев*

Методы генерации сетевых сессий для фаззинга протоколов . . . . 149

*А. И. Гетьман, Д. Р. Головаин, И. А. Степанов*

Исследование и реализация алгоритмов предсказания RTT в TCP . . 151

*А. И. Гетьман, М. В. Попов, И. А. Степанов*

Реализация и сравнительный анализ планировщиков транспортных протоколов в многопутевом режиме . . . . . 152

*В. Н. Игнатьев, Д. Д. Панов, Н. В. Шимчик*

Дополнение запросов к LLM информацией из статического анализатора для проверки предупреждений . . . . . 153

*В. Н. Игнатьев, П. И. Рагозина, М. В. Беляев*

Методы оптимизации статического анализа помеченных данных . . 155

*Л. С. Корухова, Д. И. Тулин, Р. К. Столяров, И. В. Богомолов*

Механизм выявления инцидентов в сетях ЦОД на основе анализа временных рядов сетевых метрик . . . . . 156

*И. И. Кулагин, М. М. Романов*

Оптимизация генерации кода матричного умножения для тензорного процессора . . . . . 158

*С. В. Морозов, В. А. Арефьев, О. Д. Борисенко*

Программное управление оверлейными сетями на физических коммутаторах в сетях ЦОД . . . . . 159

*А. Н. Пеструшлова, Е. П. Гугучкин, Е. А. Карпулевич, Д. Ю. Турдаков*

Реализация механизма аугментации данных в задаче дообучения модели инструмента DeepVariant . . . . . 161

<i>Г. А. Савидов, Д. О. Куц, А. А. Белеванцев</i> Анализ Java-программ методом динамического символического выполнения . . . . .	163
<i>М. А. Соловьев, Д. В. Манушин, А. А. Цехмистер</i> Унифицированный метод поиска ошибок в бинарном коде в ходе конкретного и символического исполнения . . . . .	164
<i>Д. Н. Субботин, А. А. Белеванцев, А. Е. Бородин</i> Статический анализ композитных типов в языке Java . . . . .	166
<b>Секция 15. Алгоритмические языки</b>	
<i>Доклады секции посвящаются памяти профессора Сергея Юрьевича Соловьева (к 70-летию со дня рождения) . . . . .</i>	
<i>В. Г. Абрамов, Н. Н. Молотилев</i> Алгоритм автоматического построения множества индексов для фиксированного класса запросов . . . . .	167
<i>И. А. Волкова, А. В. Протасов</i> Методы аугментации русскоязычных данных для задач классификации текстов . . . . .	168
<i>Е. С. Воронай, Н. В. Груздева</i> Кластеризация и анализ разреженных данных . . . . .	170
<i>А. А. Вылиток, Ли Цзямянь</i> Описание контекстно-зависимых языков с помощью L-графов . . . . .	171
<i>А. А. Вылиток, Му Цзинъюань</i> Методы преобразования бесконтекстных L-графов с помощью конечных автоматов . . . . .	172
<i>А. А. Вылиток, Р. Р. Касимов</i> Метод построения L-графа по формальной грамматике без ограничений . . . . .	173
<i>И. Г. Головин, А. Р. Зарипов</i> Синтаксический анализатор по расширенным сетям переходов . . . . .	174
<i>А. В. Дорофеев, И. Н. Полякова</i> Прогнозирование изменений на финансовом рынке на основе анализа тональности текстов . . . . .	176
<i>В. Б. Захаров, А. П. Волков</i> Влияние параметров нейросети на точность решения задачи классификации шахматных комбинаций . . . . .	177
<i>В. Б. Захаров, А. И. Мостяев, Т. В. Цыбиков</i> Использование дебютных деревьев для автоматической генерации шахматных задач . . . . .	178

<i>Ю. С. Корухова, И. С. Герелюк</i> Методы решения задачи построения маршрутов по описанию . . . . .	179
<i>Ю. С. Корухова, В. О. Ступеньков</i> Об одном подходе к реализации поиска формул с использованием методов доказательства эквивалентности . . . . .	180
<i>М. Д. Новиков</i> Система автоматического тестирования программ на языке Си . . . . .	181
<i>А. В. Носов, А. А. Панфёров</i> Эвристический алгоритм приведения операторных матриц по строкам . . . . .	182
<i>Е. Д. Шамаева</i> Оценка ограничения качества синтаксического разбора качеством токенизации . . . . .	184
<b>Секция 16. Оптимальное управление и дифференциальные игры . . . . .</b>	<b>185</b>
<i>С. Н. Аввакумов, Ю. Н. Киселёв, М. В. Орлов, С. М. Орлов</i> Оптимальное решение в модели многофакторной экономики с функционалом интегрального вида с дисконтированием и интегрантом типа логарифм . . . . .	186
<i>М. Н. Гончарова, Д. Ю. Прошкин, С. П. Самсонов</i> О множестве управляемости для одной системы второго порядка с мнимыми собственными значениями . . . . .	187
<i>Н. Л. Григоренко, В. П. Горьков</i> Об одной нелинейной дифференциальной игре с неполной информацией . . . . .	188
<i>В. И. Жуковский, Л. В. Жуковская, Л. В. Смирнова, Ю. А. Бельских</i> К задаче конкуренции при учете неопределенности и рисков . . . . .	189
<i>А. В. Кулевский</i> Об одном свойстве линейного преобразования множеств . . . . .	190
<i>М. С. Никольский</i> О некоторых задачах отслеживания заданного движения . . . . .	191
<i>С. М. Орлов, Е. А. Ровенская</i> Исследование модели 2h-DICE с двумя типами домохозяйств . . . . .	192
<i>Е. Н. Хайлов</i> Двухэтапная задача оптимального управления в модели конкуренции Лотки-Вольтерры лечения ракового заболевания . . . . .	193
<b>Авторский указатель . . . . .</b>	<b>195</b>



## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аристов Анатолий Игоревич

Кафедра общей математики ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова; ФИЦ «ИУ» РАН; РТУ МИРЭА, e-mail:  
ai\_aristov@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + (\lambda; \nabla)u + u(\mu; \nabla)u + \Delta u = 0,$$

описывающее нестационарные процессы в полупроводниковой среде. Здесь неизвестная функция  $u(\cdot)$  зависит от вектора пространственных переменных  $(x_1; \dots; x_N)$  и скалярного времени  $t$ , а  $\lambda \in R^N$  и  $\mu \in R^N$  — постоянные векторы.

Получено четыре класса точных решений этого уравнения. Проанализировано качественное поведение этих решений. Один из классов представлен через произвольное решение обыкновенного дифференциального уравнения, для которого проведён анализ Пенлеве.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М. : Физматлит, 2007.
- [2] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М. : Физматлит, 2005.
- [3] Ибрагимов Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. М. : Физматлит, 2012.

## О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ МОДИФИЦИРОВАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Емельянов Дмитрий Павлович

Кафедра общей математики, e-mail: emelianov@cs.msu.ru

Рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения с параболическим вырождением со смешанными краевыми условиями:

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + m y^{m-1} u'_y - a(x, y)u = f(x, y), & 0 < x < 1, & 0 < y < b, \\ -u'_x + \gamma(x, y)u = 0, & 0 < y < b, & x = 0, \\ u'_x + \gamma(x, y)u = 0, & 0 < y < b, & x = 1, \\ u'_y + \gamma(x, y)u = 0, & 0 < x < 1, & y = b, \end{cases} \quad (1)$$

где  $m \geq 1$ , полагается, что правая часть  $f(x, y)$  непрерывна, а функции  $a(x, y)$  и  $\gamma(x, y)$  непрерывны и неотрицательны при  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, b]$ . Кроме того, потребуем, чтобы  $a(x, y) > 0$  на множестве положительной меры.

Следует отметить, что для поставленной задачи классы единственности решения изучены слабо, в то время, как аналогичные задачи с краевыми условиями первого рода исследованы весьма подробно [1, 2, 3].

Введём следующие обозначения:  $\Omega = (0, 1) \times (0, b)$ ,  $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, b]$ ,  $\Omega' = \Omega \cup \{0 < y < b, x = 0, 1\} \cup \{0 < x < 1, y = b\}$ .

Решение  $u$  задачи (1) ищется в классе ограниченных в  $\bar{\Omega}$  функций, имеющих непрерывные вторые частные производные в  $\Omega$  и первые частные производные, непрерывные в  $\Omega'$ , ограниченные в окрестностях углов  $(0, b)$  и  $(0, 1)$  области  $\bar{\Omega}$ . Также будем требовать, чтобы при  $y \rightarrow 0 + 0$  имело место  $y^m u'_y \rightarrow 0$  равномерно по  $x \in (0, 1)$ .

**Теорема.** *Решение краевой задачи (1) при выполнении условий на коэффициенты в указанном классе единственно.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Келдыш М. В. О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области // Доклады АН СССР, 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
- [2] Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 448 с.
- [3] Емельянов Д. П., Ломов И. С. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. М.: ФГБУ «Издательство «Наука», 2021. Т. 57, № 5. С. 655–672.

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОБЩИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Крицков Леонид Владимирович, Некрасов Николай Витальевич

Кафедра общей математики, e-mail: kritskov@cs.msu.ru, nikolaynekrasov1999@gmail.com

Изучены спектральные свойства операторов, порожденных дифференциальным выражением

$$Lu = -u''(x) + \alpha u''(-x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

содержащим простейшее преобразование инволюции  $\nu(x) = -x$ , и общими линейно независимыми граничными условиями

$$a_{j1}u'(-1) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(-1) + a_{j4}u(1) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Вещественный коэффициент  $\alpha$  в (1) удовлетворяет условию:  $0 < |\alpha| < 1$ , а коэффициенты в (2), вообще говоря, комплексные.

Условия (2) следует считать невырожденными, т.е. неэквивалентными условиям  $u'(-1) \pm u'(1) = 0$ ,  $u(-1) \mp u(1) = 0$ , так как в этом случае резольвентное множество оператора пусто.

Доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Если граничные условия (2) сводятся к виду*

$$u'(-1) = b_{13}u(-1) + b_{14}u(1), \quad u'(1) = b_{23}u(-1) + b_{24}u(1),$$

*или к виду*

$$b_{11}u'(-1) + b_{12}u'(1) = b_{13}u(-1) + b_{14}u(1), \quad b_{23}u(-1) + b_{24}u(1) = 0,$$

*где  $|b_{11} \pm b_{12}|^2 + |b_{23} \mp b_{24}|^2 \neq 0$ , или к виду  $u(-1) = u(1) = 0$ , то система корневых функций оператора:*

*а) полна и минимальна в  $L_2(-1, 1)$ ,*

*б) образует базис Рисса в  $L_2(-1, 1)$  (при надлежащем выборе присоединенных функций) в случае, если величина  $\sqrt{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$  рациональна.*

**Теорема 2.** *Если граничные условия (2) сводятся к виду*

$$u'(-1) \pm u'(1) = \beta u(1), \quad u(-1) \mp u(1) = 0,$$

*где  $\beta \neq 0$ , то*

*а) система собственных функций оператора полна и минимальна в  $L_2(-1, 1)$  тогда и только тогда, когда величина  $\sqrt{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$  не является рациональным числом вида  $2m_0/(2n_0+1)$ ,*

*б) система собственных функций не образует базис в  $L_2(-1, 1)$  ни при каком  $\alpha$ .*

Отметим, что полученные результаты следуют известной классификации граничных условий для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка [1]. Задачи для оператора двукратного дифференцирования с отражением рассмотрены в [2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
- [2] Садыбеков С. А., Сарсенби А. М. Критерий базисности системы собственных функций оператора кратного дифференцирования с инволюцией // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 8. С. 1126–1132.

## КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ОТРАЖЕНИЕМ

Крицков Леонид Владимирович, Романова Юлия Антоновна

Кафедра общей математики, e-mail: kritskov@cs.msu.ru, amor.avon@yandex.ru

Рассмотрена начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(-x, t), & -1 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ u(-1, t) = 0, u(1, t) = \alpha u(0, t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь дифференциальное уравнение содержит простейшее преобразование инволюции  $\nu(x) = -x$  пространственной переменной, а второе краевое условие имеет нелокальный характер ( $\alpha \neq 0$  – произвольный вещественный параметр). Изучен вопрос о корректной разрешимости этой задачи в классическом смысле.

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi(x)$  – непрерывно дифференцируемая четная функция, подчиненная условиям согласования:  $\varphi(-1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Тогда начально-краевая задача (1) имеет единственное классическое решение, удовлетворяющее априорной оценке:

$$\max_{t \geq 0, x \in [-1, 1]} |u(x, t)| \leq C \|\varphi\|_{W_2^1(-1, 1)}.$$

Выбор класса корректной разрешимости в подпространстве четных функций связан с потерей устойчивости решения на множестве начальных функций общего вида.

Обоснование теоремы 1 проводится методом разделения переменных и использует результаты спектрального анализа соответствующей задачи на собственные значения:

$$\begin{cases} -U''(-x) = \lambda U(x), & -1 < x < 1, \\ U(-1) = 0, U(1) = \alpha U(0). \end{cases} \quad (2)$$

**Теорема 2.** 1) Спектр задачи (2) составляют две последовательности собственных значений  $\lambda_n^{(1)} = -(\pi n)^2$  и  $\lambda_n^{(2)} = (\pm \arccos(\alpha/2) + 2\pi n)^2$ .

2) При  $\alpha \neq \pm 2$  все собственные значения простые. При  $\alpha = \pm 2$  имеется подпоследовательность двукратных собственных значений, каждому из которых отвечают одна собственная и одна присоединенная функции.

3) Система собственных и присоединенных функций полна и минимальна в  $L_2(-1, 1)$ . Биортогонально сопряженная система состоит из корневых функций сопряженной задачи.

4) При  $\alpha \neq \pm 2$  система собственных функций, а при  $\alpha = \pm 2$  система собственных и присоединенных функций (при надлежащем выборе последних) образует безусловный базис в  $L_2(-1, 1)$ .

Спектральные задачи для дифференциальной операции в (2) с краевыми условиями общего вида исследованы в [1].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Садыбеков С. А., Сарсенби А. М. Критерий базисности системы собственных функций оператора кратного дифференцирования с инволюцией // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 8. С. 1126–1132.

## РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ПЕРВОГО ПОРЯДКА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ–ЗВЕЗДЕ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ

Савчук Артем Маркович<sup>1</sup>, Кузнецов Егор Дмитриевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: savchuk@cosmos.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: egorka.kuz@yandex.ru

Рассмотрим граф типа «звезда» с четырьмя вершинами и тремя ребрами. Каждое ребро имеет длину  $\pi$  и параметризовано переменной  $x_i \in [0, \pi]$ . На каждом ребре задана функция  $y_i(x_i)$  и потенциал  $q_i(x_i)$ . Граф параметризован таким образом, что узловая вершина графа имеет координату  $\pi$  на всех трех ребрах. На описываемом графе рассмотрим пространство  $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^3$  с

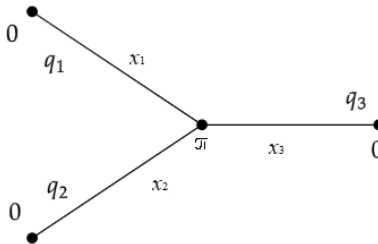


Рис. 1: Задача Штурма-Лиувилля на графе

естественным скалярным произведением. В пространстве  $\mathbb{H}$  определим дифференциальный оператор:

$$(L(y))_i = -y_i''(x_i) + q_i(x_i)y_i(x_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Мы предполагаем потенциал  $q$  обобщенной производной некоторой функции

$$u = (u_1(x_1), u_2(x_2), u_3(x_3)) \in L_2.$$

Граничные условия задаются в виде:

$$\begin{cases} y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0 \text{ (условия Дирихле на концевых вершинах),} \\ y_1(\pi) = y_2(\pi) = y_3(\pi) \text{ (условия непрерывности в узле),} \\ y_1^{[1]}(\pi) + y_2^{[1]}(\pi) + y_3^{[1]}(\pi) = 0 \text{ (условие Кривогафа).} \end{cases}$$

Будем записывать их кратко записывать  $U(y) = 0$ . Последнее условие называют *условием Кирхгофа*. Область определения оператора выбирается естественной:

$$\mathcal{D}(L) = \{y \in AC : y^{[1]} \in AC, U(y) = 0\}.$$

Здесь под  $y^{[1]} = (y_i^{[1]}(x_i))$  понимается *квазипроизводная*:

$$y_i^{[1]}(x_i) = y_i'(x_i) - q_i(x_i)y_i(x_i).$$

Повторяя рассуждения работы [1], легко проверить справедливость следующего утверждения.

**Теорема.** *Оператор  $L$  плотно определен в пространстве  $\mathbb{H}$  и замкнут. Найдется полуплоскость  $\operatorname{Re} z < a$ , которая целиком принадлежит резольвентному множеству  $\rho(L)$ . Резольвента  $R(z)$  компактна (для каждого  $z$  из этой полуплоскости).*

Отсюда, в частности, следует, что оператор  $L$  имеет дискретный спектр с единственной точкой накопления  $\infty$ . Несложно также проверить, что эти собственные значения лежат в некоторой параболе  $|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| < b$ ,  $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} > c$ .

Будем называть оператор с потенциалом  $q \equiv 0$  (и теми же краевыми условиями) невозмущенным. Обозначим его собственные значения, занумерованные по возрастанию и с учетом кратности, через  $\lambda_n^0$ .

**Теорема.** *Собственные значения оператора  $L$  допускают нумерацию, при которой выполнено  $\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .*

Наша цель — найти значение выражения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_n^0),$$

то есть, рассматривается задача поиска *регуляризованного следа* первого порядка оператора  $L(y)$  на графе.

**Теорема.** *Пусть  $q_i(x_i)$  — комплекснозначные функции класса  $L_1$ , непрерывные в точках  $x_i = 0$  и  $x_i = \pi$ . Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_n^0) = \frac{q_1(0) + q_1(\pi)}{4} + \frac{q_2(0) + q_2(\pi)}{4} + \frac{q_3(0) + q_3(\pi)}{4}.$$

Видим, что результат соответствует известной формуле Гельфанда–Левитана для регуляризованного следа первого порядка для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_n^0) = \frac{q(0)+q(\pi)}{4}$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки, 1999, Т. 66, № 6. С. 897–912

## АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

Садовничая Инна Викторовна<sup>1</sup>, Зуев Кирилл Петрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра общей математики, e-mail: ivsad@yandex.ru

<sup>2</sup> Кафедра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: kizuev02@gmail.com

**Постановка задачи** Пусть на каждом из трех ребер графа-звезды с длиной ребра  $l$  задан оператор Штурма–Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением  $l_j(h) = -h'' + q_j(x)h$ . А именно, параметризуем каждое ребро вещественным параметром  $x_j$ , изменяющимся от 0 до  $l$ , причем значение параметров  $l$  соответствует вершине, инцидентной всем трем ребрам. В свободных концах поставим условия Дирихле:  $h_0(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0$ , а в общей вершине — условие непрерывности  $h_1(l_1) = h_2(l_2) = h_3(l_3)$  и условие Кирхгофа  $h_1^{[1]}(l_1) + h_2^{[1]}(l_2) + h_3^{[1]}(l_3) = 0$ . Здесь через  $h_j^{[1]} = h'_j - u_j h_j$  обозначена квази-производная,  $q_j = u'_j$ ,  $u_j \in L_2[0, l]$ . Сведем задачу к системе:  $h_k = y_{2k-1} + y_{2k}$ ,  $h_k^{[1]} = \lambda i(y_{2k-1} - y_{2k})$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

**Теорема 1.** Пусть  $L$  — оператор, заданный выше. Тогда найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что при всех  $n \geq N$  оператор  $L$  имеет три серии собственных значений  $\lambda_{n,1}$ ,  $\lambda_{n,2\pm}$ .

Обозначим через  $\mathbf{y}_{n,1}$ ,  $\mathbf{y}_{n,2\pm}$ ,  $n \geq N$ , собственные функции оператора  $L$ , отвечающих собственным значениям  $\lambda_{n,1}$ ,  $\lambda_{n,2\pm}$  соответственно и нормированные начальными условиями  $\mathbf{y}_{n,1}^{[1]}(0) = (1, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{y}_{n,2+}^{[1]}(0) = (1, 0, -1)^T$ ,  $\mathbf{y}_{n,2-}^{[1]}(0) = (1, -2, 1)^T$ . Тогда  $\mathbf{y}_{n,1} = (y_{n,1}^1, y_{n,1}^2, y_{n,1}^3)^T$ ,  $\mathbf{y}_{n,2+} = (y_{n,2+}^1, 0, -y_{n,2+}^3)^T$ ,

$$y_{n,2-} = (y_{n,2-}^1, -2y_{n,2-}^2, y_{n,2-}^3)^T, \text{ где}$$

$$y_{n,1}^k(x) = \frac{l}{\pi(n+1/2)} \left[ \sin\left(\frac{\pi(n+1/2)x}{l}\right) + \mu_n x \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)x}{l}\right) + \int_0^x u_k(t) \sin\left(\frac{\pi(n+1/2)(2t-x)}{l}\right) dt + \varkappa_{n,1}(x) \right],$$

$$y_{n,2\pm}^k(x) = \frac{l}{\pi n} \left[ \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \nu_{n,\pm} x \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \int_0^x u_k(t) \sin\left(\frac{\pi n (2t-x)}{l}\right) dt + \varkappa_{n,2}(x) \right], k = 1, 2, 3,$$

$$\mu_n = -\frac{b_{2n+1}}{2}, \nu_{n,\pm} = -\frac{b_{2n}}{2} - c_{2n,\pm}, b_n = \frac{2}{3l} \int_0^l (u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)) \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right) dt,$$

$$c_{n,\pm} = \pm \frac{1}{3l} (I_{1,n}^2 + I_{2,n}^2 + I_{3,n}^2 - I_{1,n}I_{2,n} - I_{1,n}I_{3,n} - I_{2,n}I_{3,n})^{1/2},$$

$$I_{j,n} = \int_0^l u_j(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{l}t\right) dt, j = 1, 2, 3, \text{ а функции } \varkappa_{n,j} \text{ подчинены оценкам}$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \max_{x \in [0,l]} |\varkappa_{n,1}(x)|^p \leq C < +\infty, \quad \sum_{n=N}^{+\infty} \max_{x \in [0,l]} |\varkappa_{n,1}(x)| \cdot \ln^{-p}(n+1) \leq C < +\infty,$$

$$\text{при любом } p > 1; \quad \sum_{n=N}^{+\infty} \max_{x \in [0,l]} |\varkappa_{n,2}(x)|^p \leq C < +\infty \text{ при любом } p > 4/3.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Савчук А.М., Садовничая И.В. Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма–Лиувилля с коэффициентами–распределениями // Современная математика. Фундаментальные направления. 2020. Т. 66, № 3. С. 373-530.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПРЕДИКТИВНОГО АНАЛИЗА ПОИСКА АНОМАЛИЙ В РАБОТЕ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Белоусова Надежда Максимовна, Ечкина Евгения Юрьевна

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: s02220030@gse.cs.msu.ru, ejane@cs.msu.ru

Предиктивная аналитика – это мощный инструмент, помогающий прогнозировать неисправности промышленного оборудования, минимизируя простои и



снижая финансовые потери предприятий. В работе рассматриваются методы обнаружения аномалий во временных данных, характеризующих состояние насосного агрегата, также предлагается метрика для оценки степени «аномальности» работы промышленного оборудования.

В работе рассматривается два наиболее часто используемых метода:  $k$ -средних и изоляционный лес. На одних и тех же отфильтрованных данных проведен сравнительный анализ выявления аномалий в работе оборудования. Для сравнения двух методов была разработана оценка «аномальности».

Степень «аномальности» вводится как разница по модулю между средневзвешенным значением выявленных алгоритмами аномальных точек в исследуемом временном ряду и ряду, который описывает критическое состояние агрегата.

Предложенные методы позволяют не только обнаруживать аномалии в работе насосного оборудования и интерпретировать результаты для принятия решений по обслуживанию техники.

В среднем алгоритмы показали схожие результаты, однако стоит отметить несколько важных различий. Во-первых, изоляционный лес более вычислительно затратный, чем алгоритм  $k$ -средних, за счет того, для прогноза строятся несколько деревьев, по которым проводится усреднение, в то время как  $k$ -средних обрабатывает данные единожды и сразу выдает результат. Во-вторых, изоляционный лес показал чуть большую чувствительность к обнаружению аномалий, чем  $k$ -средних.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жерон О. Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn, Keras и TensorFlow: концепции, инструменты и техники для создания интеллектуальных систем. 2-е издание. 2020.
- [2] Кун М., Джонсон К. Предиктивное моделирование на практике. 2019.

# ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Вабищевич Петр Николаевич**

Кафедра автоматизации научных исследований, факультет ВМК МГУ, e-mail: vab@cs.msu.ru

Строятся и исследуются численные методы приближенного решения задачи Коши для системы из двух интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с памятью [1]. Такие нелокальные математические модели можно связать с нестационарными уравнениями Максвелла для электрического и магнитного полей с учетом дисперсии электрического поля [2]. Переход к локальной задаче Коши для расширенной системы эволюционных уравнений первого порядка обеспечивается аппроксимацией разностного ядра интегрального члена суммой

экспонент [3]. Основной результат работы состоит в построении безусловно устойчивых двухслойных операторно-разностных схемах в конечномерных гильбертовых пространствах.

Обозначим через  $H_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , конечномерные действительные гильбертовы (евклидовы) пространства, в которых скалярные произведения и нормы есть  $(\cdot, \cdot)_\alpha$  и  $\|\cdot\|_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  соответственно. Для самосопряженного положительно определенного оператора  $D_\alpha$ , где  $\alpha = 1$  или  $\alpha = 2$ , определим гильбертово пространство  $H_\alpha(D_\alpha)$  со скалярным произведением и нормой  $(u_\alpha, v_\alpha)_{D_\alpha} = (D_\alpha u_\alpha, v_\alpha)$ ,  $\|u_\alpha\|_{D_\alpha} = (u_\alpha, v_\alpha)_{D_\alpha}^{1/2}$ .

Отдельные компоненты искомого решения обозначим  $u_\alpha(t)$ ,  $\alpha = 1, 2$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $T > 0$ . Решение удовлетворяет следующей системе интегродифференциальных уравнений первого порядка:

$$B_1 \frac{du_1}{dt} + A_{11}u_1 + \int_0^t k(t-s)Cu_1(s)ds + A_{12}u_2 = 0, \quad (1)$$

$$B_2 \frac{du_2}{dt} + A_{21}u_1 = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (2)$$

Система уравнений (1), (2) дополняется начальными условиями

$$u_\alpha(0) = u_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3)$$

Мы ограничимся, для простоты, случаем однородных правых частей, учет которых не носит принципиального характера для достижения основной цели нашего исследования. Считаем, что линейные операторы  $B_1, B_2, C, A_{11}, A_{12}, A_{21}$  являются постоянными (не зависят от  $t$ ) и пусть

$$\begin{aligned} B_\alpha &= B_\alpha^* \geq \nu_\alpha I_\alpha, \quad \nu_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad C = C^* \geq \lambda I_1, \quad \lambda > 0, \\ A_{11} &= A_{11}^* \geq \gamma I_1, \quad \gamma > 0, \quad A_{12} = -A_{21}^*, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $I_\alpha$  — единичные операторы в  $H_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Последнее свойство в (4) соответствует тому, что

$$(A_{21}u_1, u_2)_2 = (u_1, A_{21}^*u_2)_1 = -(u_1, A_{12}u_2)_1.$$

Мы приходим к задаче (1)–(4), в частности, после аппроксимации по пространству нестационарных уравнений Максвелла в неоднородной среде с учетом дисперсии электрического поля. В этом случае напряженность электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  определяются из уравнений

$$\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E} + \int_0^t \chi(\mathbf{x}, t-s)\mathbf{E}(\mathbf{x}, s)ds - \text{rot } \mathbf{H} = 0,$$

$$\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

Здесь  $\varepsilon(\mathbf{x})$  — диэлектрическая проницаемость,  $\mu(\mathbf{x})$  — магнитная проницаемость, а  $\sigma(\mathbf{x})$  — электрическая проводимость среды. Дисперсионные свойства описываются заданной функцией  $\chi(\mathbf{x}, t)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-11-00058).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. Birkhäuser, 1993.
- [2] Landau L. D., Pitaevskii L. P., Lifshitz, E. M. Electrodynamics of Continuous Media. Butterworth-Heinemann, 1984.
- [3] Vabishchevich P. N. Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels // Applied Numerical Mathematics. 2022. Vol. 174. P. 177–190.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГРАНИЦЫ ПЛАЗМЫ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ НА УСТАНОВКЕ ТОКАМАК В УСЛОВИЯХ ФОРМИРОВАНИЯ ДИВЕРТОРНОЙ КОНФИГУРАЦИИ**

**Зотов Игорь Викторович, Дементьев Николай Сергеевич, Пахнушев  
Андрей Вадимович**

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: iv-zotov@cs.msu.ru, korpanach@gmail.com, andrew.pakhnushev@gmail.com

В современных экспериментальных установках для управляемого термоядерного синтеза токамак для отвода продуктов реакции и примесей используется диверторная конфигурация плазмы. Она подразумевает создание вытянутого по вертикали поперечного сечения плазменного шнура, ограниченного сепаратрисой. Сепаратриса - магнитная поверхность, разделяющая замкнутые магнитные поверхности от незамкнутых. Существенной особенностью такой конфигурации является наличие на сепаратрисе х-точек, в которых полоидальное магнитное поле обращается в ноль. Для формирования плазменной конфигурации с сепаратрисой используется внешнее магнитное поле, создаваемое системой кольцевых токов. В эксперименте в процессе разряда требуется определение положения х-точек сепаратрисы, а также «усов» сепаратрисы, выходящих за пределы вакуумной камеры в зону дивертора. Контроль сепаратрисы возможен на основе решения обратной задачи МГД-равновесия с использованием данных электромагнитной диагностики. В данной работе представлены результаты анализа поведения границы плазмы в течение разряда в случае формирования диверторной конфигурации. Использовался численный код RPB для решения обратной задачи [1]. В качестве входных данных использовались результаты решения прямой задачи МГД-равновесия (код TOKSCEN) [2], а также экспериментальные данные для установки токамак Т-15МД [3].

Моделирование проводилось для диагностической системы, включающей в себя петли для измерения потока полоидального магнитного поля, а также пояса Роговского для нахождения величин токов во внешних управляющих катушках. Полученные результаты по восстановлению границы сравнивались с результатами съемки разряда видеокамерой, установленной внутри вакуумной камеры. Получено хорошее совпадение границы плазмы, полученной разными методами.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зотов И. В., Белов А. Г. Вычислительный код RPB для расчета границы плазмы по магнитным измерениям (модуль библиотеки «Виртуальный токамак») // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез, т.37 (2014), вып.1, с. 97-102.
- [2] Optimization of electromagnetic diagnostic system of the T-15 tokamak / I. V. Zotov, A. V. Melnikov, D. Yu. Sychugov, V. E. Lukash, R. R. Khayrutdinov // 43rd EPS Conference on Plasma Physics, 2016, vol.40A, P2.035.
- [3] Зотов И. В., Андреев В. Ф., Балашов А. Ю. и др. Восстановление границы плазмы по экспериментальным измерениям токамака Т-15МД. — В сб.: 51 Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и УТС, Сборник тезисов докладов, 18–22 марта 2024 г., с.135.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМ СЕМЕЙСТВА CWENO ДЛЯ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА НА СЕТКАХ СО СМЕШАННЫМ ТИПОМ ЯЧЕЕК

Жилин Виктор Александрович, Смирнов Александр Павлович<sup>1</sup>, Капырин Иван Викторович, Ануприенко Денис Валерьевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: s02240418@gse.cs.msu.ru, sap@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, e-mail: ivan.kapyrin@gmail.com

Моделирование переноса радионуклидов с подземными водами является особенно важным для обеспечения безопасности объектов атомной энергии. Использование простых численных схем может приводить к размыванию решения. Схема CWENOZ увеличивает порядок точности в областях с высокой гладкостью путем введения оптимального полинома высокой степени [1].

Рассмотрим уравнение переноса:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}C) = 0 \quad (1)$$

Распишем дискретизацию для уравнения переноса (1) с помощью метода конечных объемов и явного метода Эйлера:

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} V_i + \sum_{e_k \in \partial E_i} \int_{e_k} \vec{u} C_{upw}^n \cdot \vec{n}_{e_k} dS = 0 \quad (2)$$

Ключевой особенностью CWENO схем является восстановление функции с помощью комбинации полиномов, построенных на центральном и направленных шаблонах. Алгоритм нахождения шаблонов представлен в работе [2]. Отличие CWENOZ-схем заключается в выборе весов, которые позволяют добиться лучшей точности на гладких данных [3].

В уравнении (2)  $\int_{e_k} C_{upw}^m dS$  является средним значением концентрации на грани. Аппроксимируем концентрацию на каждой ячейке расчетной сетки  $E_i$  с помощью полинома некоторой степени  $g$ .

$$p_i(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=0}^K a_k \varphi_k(\xi, \eta, \zeta) = C_i + \sum_{k=1}^K a_k \varphi_k(\xi, \eta, \zeta) \quad (3)$$

Полиномиальное восполнение строится на ячейке с использованием полиномиальных базисных функций  $\varphi_k(\xi, \eta, \zeta)$  (3). Итоговый полином схемы CWENOZ вычисляется следующим образом:

$$p_i(\xi, \eta, \zeta)^{CWENOZ} = \sum_{s=1}^{S_i} \omega_s p_s(\xi, \eta, \zeta) \quad (4)$$

Каждому многочлену присваивается вес, зависящий от гладкости (4).

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что использование CWENOZ-схем позволяет достичь точности лучше, чем у WENO и MUSCL, что подтверждает их эффективность.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tsoutsanis P., Dumbser M. Arbitrary high order central non-oscillatory schemes on mixed-element unstructured meshes // Computers and Fluids. 2021. Т. 225. С. 104961.
- [2] Tsoutsanis P. Stencil selection algorithms for WENO schemes on unstructured meshes // Journal of Computational Physics 2019. Vol. 4. Pp. 100037.
- [3] Cravero I., Semplice M., Visconti G. Optimal definition of the nonlinear weights in multidimensional central WENOZ reconstructions // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2019. Т. 57. №. 5. С. 2328-2358.

## **УСКОРЕНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАТНОЙ ДИФФУЗИИ В ЗАДАЧЕ ГЕНЕРАТИВНОГО УЛУЧШЕНИЯ РЕЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕДСКАЗАТЕЛЬНЫХ ДЕКОДЕРОВ**

**Никонов Максим Викторович, Шишкин Алексей Геннадиевич**

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: nikon.mv.mmc@gmail.com,  
shishkin@cs.msu.ru

В последние годы диффузионные модели привлекли большое внимание как перспективный подход к задачам генерации речи, включая синтез, вокодинг

и улучшение речи [1, 3, 6]. Они демонстрируют способность повышать перцептивное качество очищенной речи, порой превосходя дискриминативные методы [2, 6]. Однако основной недостаток диффузионных моделей заключается в медленном процессе выборки (обратной диффузии), требующем десятков и даже сотен итераций для генерации одного фрагмента речи [1, 4]. Это делает их непрактичными для приложений реального времени, таких как слуховые аппараты и системы конференц-связи.

Существуют различные методы ускорения обратной диффузии: от детерминированных схем DDIM [4] до численных солверов ODE (DPM-Solver [5]) и дистилляции. В данной работе рассматривается другой подход: использование совместно дискриминативного (предсказательного) декодера и диффузионной генерации. Идея состоит в том, чтобы с помощью быстрого предсказательного декодера получить улучшенный сигнал, используемый для инициализации диффузионного процесса, а по завершении небольшой серии итераций — выполнить финальное смешивание результатов [3].

**Постановка задачи.** Рассмотрим чистый речевой сигнал  $x_0$  и его зашумлённую версию  $y$ . Задача улучшения речи заключается в восстановлении исходного сигнала  $x_0$  по  $y$  [1, 2, 6]. Диффузионные модели описывают прямой процесс добавления шума:

$$q(x_t | x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t; \sqrt{1 - \beta_t} x_{t-1}, \beta_t I), \quad (1)$$

где  $\beta_t$  — заранее заданный уровень шума. Соответствующий обратный процесс, используемый при генерации, имеет вид:

$$p_\theta(x_{t-1} | x_t, y) = \mathcal{N}(x_{t-1}; \mu_\theta(x_t, t, y), \Sigma_\theta(x_t, t, y)). \quad (2)$$

**Предлагаемый алгоритм.** Предлагаемая модель состоит из двух декодеров, использующих общий энкодер:

- Предсказательный декодер, восстанавливающий сигнал  $\hat{x}_{\text{pred}}$  за один проход.
- Генеративный (диффузионный) декодер, реализующий процесс обратной диффузии [3, 4].

Инициализация обратного процесса осуществляется с помощью сигнала, полученного предсказательным декодером:

$$x_T = \hat{x}_{\text{pred}} + \sigma_T z, \quad z \sim \mathcal{N}(0, I), \quad (3)$$

что существенно ускоряет сходимость процесса. По завершении генерации результаты смешиваются:

$$x_0^{(\text{final})} = \beta x_0^{(\text{gen})} + (1 - \beta) \hat{x}_{\text{pred}}. \quad (4)$$

**Эксперименты.** Использовался стандартный датасет VoiceBank-DEMAND, включающий 28 дикторов для обучения и 2 для теста с уровнями шума от 0 до 17.5 дБ [7]. Всего 11572 обучающих и 824 тестовых фрагмента (16 кГц, моно).

В таблице 1 приведены результаты тестирования на VoiceBank-DEMAND [7].

Таблица 1: Сравнение моделей

Модель	PESQ	ESTOI	SI-SDR (дБ)
Conv-TasNet [2]	2.84	0.85	19.1
SGMSE (30 шагов) [1]	2.93	0.87	17.3
StoRM (25 шагов) [1]	2.93	0.88	18.8
<b>GP-Unified (15 шагов)</b>	<b>2.97</b>	0.87	18.3

**Заключение.** Мы рассмотрели задачу ускорения обратной диффузии при генеративном улучшении речи. Предложенный метод объединяет предсказательный и диффузионный декодеры в одной архитектуре, использует инициализацию выходом предсказателя и финальное смешивание. Эксперименты на VoiceBank-DEMAND показали, что за счёт такой схемы можно сократить число шагов диффузии вдвое и получить качество, превосходящее классические диффузионные модели. Предложенный подход позволяет существенно снизить количество шагов обратной диффузии без потери качества восстановления сигнала, что подтверждается результатами экспериментов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Richter J., Welker S., Lemercier J.-M., Lay B., Gerkmann T. Speech Enhancement and Dereverberation With Diffusion-Based Generative Models // IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. 2023. Т. 31. С. 2351–2364.
- [2] Luo Y., Mesgarani N. Conv-TasNet: Surpassing Ideal Time–Frequency Magnitude Masking for Speech Separation // IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. 2019. Т. 27, № 8. С. 1256–1266.
- [3] Shi H., Shimada K., Hirano M., Shibuya T., Koyama Y., Zhong Z., Takahashi S., Kawahara T., Mitsufuji Y. Diffusion-Based Speech Enhancement With Joint Generative and Predictive Decoders // Proceedings of ICASSP 2024. 2024. С. 12951–12955.
- [4] Song Y., Sohl-Dickstein J., Kingma D.P., Kumar A., Ermon S., Poole B. Score-Based Generative Modeling Through Stochastic Differential Equations // Proceedings of ICLR 2021. 2021.
- [5] Lu C., Zhou Y., Bao F., Chen J., Li C.-L., Zhu J. DPM-Solver: A Fast ODE Solver for Diffusion Probabilistic Model Sampling in Around 10 Steps // Proceedings of NeurIPS 2022. 2022.
- [6] Pascual S., Bonafonte A., Serra J. SEGAN: Speech Enhancement Generative Adversarial Network // Proceedings of Interspeech 2017. 2017. С. 3642–3646.

- [7] Valentini-Botinhao C., Wang X., Takaki S., Yamagishi J. Investigating RNN-Based Speech Enhancement Methods for Noise-Robust Text-to-Speech // Proceedings of SSW9. 2016. С. 146–152.

## **ЧИСЛЕННОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА УСТАНОВКЕ ТОКАМАК Т-15 МД**

**Сычугов Дмитрий Юрьевич<sup>1</sup>, Рыжаков Дмитрий Владимирович, Андреев Валерий Филиппович, Горбунов Алексей Викторович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; НИЦ "Курчатовский институт" Москва, Россия, e-mail: sychugov@cs.msu.ru; nrcki@nrcki.ru

<sup>2</sup> НИЦ "Курчатовский институт" Москва, Россия, e-mail: nrcki@nrcki.ru

В 2023-2024 гг. на установке Токамак Т-15МД (Россия, НИЦ «Курчатовский институт») [1] прошли экспериментальные кампании, целью которых была отработка основных сценариев разряда и выход на параметры по току в плазме до нескольких сотен КА и длительностью разряда до нескольких секунд. Поддержка экспериментов проводилась по численным кодам, разработанных в МГУ на факультете ВМК [2].

В ходе кампаний 2023-2024 гг. за счет взаимодействия команд экспериментаторов и вычислителей были последовательно решены следующие задачи:

1. Коррекция внешних магнитных полей, позволившая подавить вертикальную неустойчивость, которая была в начальных разрядах весенней кампании 2023 г. [3];
2. Решение проблемы управления плазменным шнуром по горизонтали, и, как следствие, выход на разряды с током в плазме порядка 250 КА и времени разряда порядка 2-3 секунд, осенняя кампания 2023 г [3];
3. Достижение в ходе осенней кампании 2024 г. разрядов с током в плазме более 500 КА и временем разряда порядка нескольких секунд [4].

Работа проведена в рамках выполнения Государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Khvostenko P. P. et al. Current status of tokamak T-15MD // Fusion Engineering and Design. – 2021. – Т. 164. – С. 112211.
- [2] Сычугов Д. Ю. и др. Труды факультета вычислительной математики и кибернетики им. М.В. Ломоносова, т.75, с. 2-20. // Изд. МАКС Пресс Москва, 2023.
- [3] Сычугов Д. Ю. и др. Моделирование устойчивых равновесных магнитных конфигураций для первых экспериментов на установке токамак Т-15МД. Первые экспериментальные результаты на токамаке Т-15М.// ВАНТ. Сер.



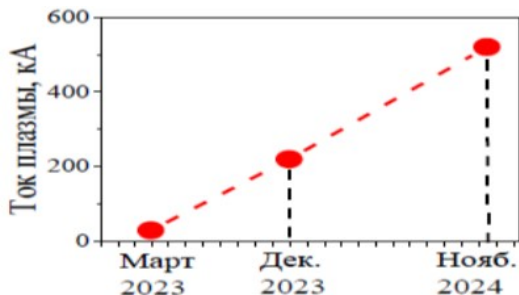


Рис. 1: Увеличение достигнутых значений тока плазмы в экспериментальных кампаниях T-15MD.

Термоядерный синтез, 2024, т. 47, вып. 3, стр. 5-16. DOI: 10.215117/0202-38-22-2024-47-3-5-16.

- [4] Анашкин И. О. и др. Токамак T-15MD: задачи и новые экспериментальные результаты. ЛП Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и УТС, 17 – 21 марта 2025 г.

## РАСПОЗНАВАНИЕ ПОЧЕЧНЫХ ПАТОЛОГИЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ УЗИ

Шишкин Алексей Геннадиевич<sup>1</sup>, Шейнов Артём Владимирович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: shishkin@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: s02210595@gse.cs.msu.ru

**Введение** Ультразвуковое исследование (УЗИ) является одним из наиболее распространённых методов диагностики патологий почек. Однако интерпретация снимков требует высокой квалификации врача и может быть субъективной. В связи с этим актуальной задачей является разработка автоматизированных методов анализа снимков УЗИ, включающих классификацию патологий и сегментацию почек.

**Цель работы** Целью данной работы является разработка и исследование методов машинного обучения для классификации патологий почек на снимках УЗИ и автоматической сегментации почек на изображениях.

**Методы** Для решения задачи классификации патологий использовались сверточные нейронные сети (CNN), такие как ResNet, EfficientNet, Vision Transformer. Для сегментации почек применялась архитектура U-Net, которая показала высокую эффективность в задачах биомедицинской сегментации.

Предварительная обработка данных включала нормализацию, аугментацию и разметку областей интереса. Также на изображениях были устранены

артефакты, связанные с выполнением необходимых измерений во время диагностических исследований.

Для создания модели, выполняющей семантическую сегментацию почек, была проведена серия экспериментов по выбору архитектуры нейронной сети, кодировщика, а также функции потерь. Для улучшения результатов веса кодировщика инициализировались значениями, полученными при обучении на больших объемах данных. Для оценки качества обучения были выбраны метрики: точность (accuracy), F1-мера (F1 score) и IoU (Intersection over Union). Также для увеличения обучающей выборки была выполнена аугментация данных, что позволило улучшить качество итоговой модели.

В результате проведенных экспериментов были получены модели, решающие задачу сегментации (U-Net) и детектирования паталогий (ResNet, предварительно обученным на наборе данных ImageNet). Итоговые модели характеризуются следующими метриками: Accuracy: 0.92, F1 score: 0.91, IoU : 0.88.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation // Proceedings of the International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI 2015). Munich, Germany, October 5–9, 2015. P. 234–241.
- [2] Litjens G., Kooi T., Bejnordi B. E. et al. A Survey on Deep Learning in Medical Image Analysis // Medical Image Analysis. 2017. Vol. 42. P. 60–88.
- [3] Zhang Y., Yang L. Kidney Segmentation in Ultrasound Images Using Deep Learning: A Review // Journal of Medical Systems. 2020. Vol. 44, no. 6. P. 1–12.
- [4] Wang Y., Li X. Ultrasound Image Segmentation for Kidney Disease Diagnosis: Challenges and Opportunities // Journal of Healthcare Engineering. 2020. Vol. 2020. P. 1–10.

## **СХЕМА «КАБАРЕ» ДЛЯ РЕЛАКСАЦИОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СКАЛЯРНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

**Головизнин Василий Михайлович, Сержантов Артемий Вячеславович**

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Сарове, e-mail: gol@ibrae.ac.ru,  
serzhantovartemy@yandex.ru

**В**

последние годы развивается так называемый балансно-характеристический подход [1]. Данный подход к численному решению гиперболических уравнений сочетает преимущества как консервативных, так и характеристических методов. Схема КАБАРЕ [2] отличается простотой, большой степенью однородности и

высокой вычислительной эффективностью. Она становится очень популярной в современной вычислительной математике. Однородность алгоритма схемы КАБАРЕ нарушается только в так называемых «звуковых точках», когда направления характеристик одного семейства в соседних расчетных ячейках меняют знак. Эти случаи требуют отдельного рассмотрения, усложняют программную реализацию и снижают точность вычислений. Однако эту проблему можно устранить, приблизив исходное уравнение системой гиперболических уравнений релаксационного типа, исключающих формирование «звуковых точек» (The Jin-Xin model) [3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В. М. Головизнин, М. А. Зайцев, С. А. Карabasов, И. А. Короткин. // М. : Изд-во Моск. ун-та, 2013. 472 с.
- [2] S. A. Karabasov., V. M. Goloviznin. Compact Accurately Boundary-Adjusting high Resolution Technique for fluid dynamics // *Comp. Physics*. 2009. 228. P. 7426–745.
- [3] S. Jin and Z. P. Xin. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions // *Comm. Pure Appl. Math.*, 48(3):235–276, 1995.

## **ДОСТИЖЕНИЕ ВЫСОКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ АДАПТИВНЫХ НЕОТРАЖАЮЩИХ ИСКУССТВЕННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА**

**Егоренков Владимир Александрович<sup>1</sup>, Трофимов Вячеслав Анатольевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных методов, e-mail: Egorenkov-v-a@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Гуанчжоу, Южно-Китайский университет технологий, SCUT, e-mail: trofimov@scut.edu.cn

Компьютерное моделирование задач нелинейной оптики и лазерной физики, процессы в которых описываются нелинейным уравнением (или системами уравнений) Шредингера, часто требуют введения искусственных границ (ИГ), на которых ставятся прозрачные (неотражающие) искусственные краевые условия (ИКУ), из-за большого объема вычислений. Поэтому разработка ИКУ для уравнения Шредингера является актуальной задачей.

В докладе показана возможность эффективного применения адаптивных неотражающих ИКУ для двумерного уравнения Шредингера, описывающего дифракцию оптического пучка в линейной среде. Для демонстрации этого рассматривается задача дифракции пучка при его неподвижном центре. Предложенный в работе алгоритм, основанный на использовании локальных волновых чисел (ЛВЧ) оптического пучка, позволяет минимизировать отражение волн от искусственных границ. Для вычисления ЛВЧ записывается их аппроксимация через интегральное соотношение, записанного на основе инвариантов

уравнения Шредингера, используя решения задачи вблизи искусственной границы [1]. Это позволяет учесть изменения локальных характеристик оптического излучения, вызванные его дифракцией. Продемонстрирована зависимость эффективности ИКУ от шага сетки по координате, вдоль которой ставятся ИКУ, и разности фаз волны в соседних узлах сетки вблизи искусственной границы: чем быстрее изменяется фаза, тем меньше должен быть шаг по сетке для достижения той же точности. Определенную роль играет и размер вычислительной области: в некоторых случаях небольшое увеличение размеров области в сочетании с ИКУ позволяет значительно сократить время расчетов.

Работоспособность предложенных ИКУ демонстрируется сравнением результатов компьютерного моделирования с известными аналитическими решениями, а также с расчетами, проведенными в значительно расширенной области.

Егоренков В.А. благодарит РФФИ (проект № 24-71-0003) за финансовую поддержку работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Trofimov V. A. Efficiency of using adaptive artificial boundary conditions at computer simulation of contrast spatio-temporal laser-induced structures in a semiconductor / V. A. Trofimov, M. M. Loginova, V. A. Egorenkov // *Comp and Math Methods*. 2021. Vol 3, № 6. P. e1165.

## **АВТОМАТИЧЕСКИЙ ВЫБОР ШАГА В ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ**

**Еленин Георгий Георгиевич<sup>1</sup>, Еленина Татьяна Георгиевна<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра численных методов, факультет Вычислительной математики и кибернетики, e-mail: elenin2@rambler.ru

<sup>2</sup> Кафедра математического моделирования и информатики, Физический факультет, e-mail: t.yelenina@gmail.com

Многие фундаментальные и прикладные вопросы молекулярной динамики и небесной механики решаются на основе построения численных решений задачи Коши для гамильтоновых уравнений и анализа этих решений.

Одна из особенностей точных решений задачи заключается в наличии таких глобальных свойств как симплектичность отображения начального состояния в текущее состояние, обратимость во времени, сохранение фазового объема, существование первых интегралов. Эти свойства имеют глубокий геометрический и физический смысл. Желательно, чтобы приближенные решения сохранили все эти свойства, в особенности при расчетах на больших отрезках независимой переменной. Другой особенностью решений рассматриваемой задачи

является наличие погранслоев в заранее не определенных областях носителя решения.

В связи с вышесказанным в современной вычислительной математике существует проблема построения эффективных численных методов решения задачи с автоматическим выбором шага интегрирования, сохраняющих глобальные свойства в рамках точной арифметики [1].

В докладе рассматривается подход, основанный на ряде замен независимой переменной с учетом свойств решения задачи, и симметрично-симплектических методах Рунге-Кутты. Приводится вид конкретных семейств одношаговых численных методов, полученных с помощью рассматриваемого подхода.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. 644 p.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНОГО ДЕЛОВОГО ЦИКЛА НА ОСНОВЕ ИГРЫ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Богомолов Сергей Владимирович, Леонов Елисей Александрович

Кафедра вычислительных методов, e-mail: bogomo@cs.msu.ru, elishaleonov@gmail.com

Рассматривается модель общего равновесия с гетерогенными агентами в постановке игры среднего поля, которые набирают популярность в литературе последних лет [1,2]. Здесь рассматривается модель с двумя секторами экономики: производственный и научнообразовательный. В модели действуют два типа агентов: домохозяйства и фирмы, — при этом гетерогенность присуща домохозяйствам, а не фирмам, которые работают в условиях совершенной конкуренции. Домохозяйства отличаются по уровню доходов и активов, при этом доходы домохозяйства прямо зависят от уровня его квалификации. Домохозяйства могут терять квалификацию или повышать, и чтобы ее повысить необходимо затратить ресурсы на услуги преподавателей и выделить собственные трудочасы. Формально модель описывается системой вида (1) (задача фирмы имеет стандартный вид поэтому для краткости ограничимся задачей домохозяйства).

$$\left\{ \begin{array}{l} V(t) = \max_{c, l_y, l_e} E_0 \int_0^\infty e^{-\rho t} u[c(t), l(t), l_E(t)] dt \\ dk_t = (W_Y l_Y + W_T l_T + Rk - \delta_k k - c - P_E i_E) dt \\ de_t = (i_E - \delta_e e) dt + \sigma_e^{1/2} dW_e; i_E = L_T^\gamma * l_E^{1-\gamma} \\ K = \int_0^\infty \int_0^\infty k g(k, e) dk de; E = \int_0^\infty \int_0^\infty e g(k, e) dk de \\ L = \int_0^\infty \int_0^\infty l g(k, e) dk de; L_T = \int_0^\infty \int_0^\infty l_T g(k, e) dk de \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $V(t)$  — функция стоимости (ценности),  $e^{-\rho t}$  — дисконтирующий множитель,  $u[\ast]$  — функция мгновенной полезности, которая зависит от потребления  $c$ , труда в любом из секторов  $l$  и от собственных трудозатрат на обучение  $l_E$ . Инвестиции в квалификацию зависят не только от собственных трудозатрат, но и от усилий образовательного сектора  $L_T$ . Переменные  $R, P_E, W_Y, W_T$  обозначают соответственно цену капитала, стоимость обучения, зарплату в производственном и образовательном секторах. Наконец,  $g(k, e)$  есть плотность совместного распределения капитала и квалификации в экономике между домохозяйствами. Сектор фирм работает с агрегированными величинами, которые представлены интегралами.

Модель калибруется в соответствии с опытом современных работ. В основе численного решения модели лежит нейросетевой подход, который имеет хорошие перспективы по сравнению с конечно-разностными методами [3] при увеличении размерности задачи [4]. Нейронные сети, отвечающие за переменные управления обучаются на обновляемой разреженной случайной сетке. Функция потерь формируется как сумма квадратов невязок системы уравнений, включающей необходимые условия оптимальности (в т.ч. уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана), уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, а также агрегирующие интегралы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Achdou Y., Han J., Lasry J-M., Lions P-L., Moll B. Income and Wealth Distribution in Macroeconomics: A Continuous-Time Approach// Review of Economic Studies, 89, Society for Economic Dynamics, 2022
- [2] Parra-Alvarez J.C. Solution Methods and Inference in Continuous-Time Dynamic Equilibrium Economies// PhD Thesis, Aarhus University, 2015
- [3] Achdou Y., Lauriere M. Mean Field Games and Applications: Numerical Aspects// Mean Field Games (LNM, volume 2281), Cetraro, Italy 2019
- [4] Maliar L., Maliar S., Winant P. Deep Learning for Solving Dynamic Economic Models // Journal of Monetary Economics, Vol. 122., 2021, pp. 76–101

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ**

### **МОНИТОРИНГА УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ**

#### **ЭЛЕКТРОЛИЗА АЛЮМИНИЯ**

**Мокин Андрей Юрьевич, Савенкова Надежда Петровна, Сапожников**

**Кирилл Эдуардович, Ненахов Нил Денисович**

Кафедра вычислительных методов, e-mail: phd02243189@gse. cs. msu. ru

В настоящей работе обсуждается моделирование динамики управляющих параметров технологического процесса электролиза алюминия при МГД - неста-

бильности ванны в случае анодного эффекта [1]. Моделирование осуществлялось с помощью ранее созданного вычислительного комплекса 3DVE [2].

Для расчёта криолитового отношения по теоретической формуле (1)

$$\text{КО} = \frac{\text{Молярная концентрация (NaF)}}{\text{Молярная концентрация (AlF}_3\text{)}}, \quad (1)$$

предлагается использовать модифицированное уравнение Нернста-Планка, учитывающее перенос основных ионов и катионов, возникающих в результате химических реакций под действием скорости, температуры и потенциала, вычисленных при помощи комплекса 3DVE в каждой точке рабочего пространства ванны в любой момент времени:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \text{div} \left( \text{grad} C_i + \frac{z_i F}{RT(t)} C_i \text{grad} \phi(t) \right) - \text{div}(C_i \vec{v}(t)), \quad (2)$$

где  $C_i$  – концентрация  $i$ -ого иона/катиона,  $t$  – время,  $D_i$  – коэффициент диффузии  $i$ -ого иона/катиона,  $z_i$  – заряд  $i$ -ого иона/катиона,  $F$  – постоянная Фарадея,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T(t)$  – температура,  $\phi(t)$  – потенциал электростатического поля,  $\vec{v}(t)$  – скорость ионов.

Потери выхода по току рассчитываются по предложенной авторами следующей формуле

$$\delta \eta(t) = (1 - \eta_0) \cdot \frac{1}{S(t)} \cdot \int_{Z(x,y,t)} \frac{l(x,y,t)}{H(x,y,t)} d\sigma, \quad (3)$$

где  $\eta_0$  – потери по току при плоской границе раздела,  $l(x, y, t)$  – межполюсное расстояние (в точке  $(x, y)$  в момент времени  $t$ ),  $Z(x, y, t)$  – поверхность раздела сред металл-электролит,  $S(t)$  – площадь жидкого катода (площадь поверхности раздела сред  $Z(x, y, t)$ ),  $H(x, y, t)$  – толщина слоя металла.

Значение  $Z(x, y, t)$  предлагается определять при помощи вычислительного комплекса 3DVE [2]. Вычисление поверхностного интеграла проводится методом триангуляции.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белолипецкий В. М. Математическое моделирование процесса электролитического получения алюминия. Решение задач управления технологией. Красноярск: Сибирский федеральный университет. Библиогр. 2013. 271 с.
- [2] Калмыков А. В. Математическое моделирование влияния процессов тепло-массопереноса на МГД-стабильность алюминиевого электролизёра : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 / Калмыков Алексей Вадимович. Москва, 2017. 137 с.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ К РЕАЛЬНЫМ МЕДИЦИНСКИМ БАЗАМ ДАННЫХ

Мухин Сергей Иванович, Буничева Анна Яковлевна, Кочетов Егор Владимирович, Радаева Карина Владиславовна<sup>1</sup>, Королев Юрий Михайлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных методов, e-mail: vmmus@yandex.ru, bunicheva@cs.msu.ru, zikilop@yandex.ru, s02210025@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра хирургических болезней, e-mail: korolyov-1997@mail.ru

В настоящее время интеллектуальная обработка данных является одним из быстроразвивающихся направлений информационных технологий. Активно методы машинного обучения используются в медицине для обработки баз данных пациентов.

В работе обсуждаются подходы к интеллектуальной обработке реальных медицинских данных. Исследование ведется на примере обезличенной базы данных, содержащей информацию о проведенных хирургических вмешательствах и необходимую сопутствующую информацию. Как известно, инфекционные послеоперационные осложнения могут негативно отразиться на состоянии пациента и требуют коррекции в послеоперационной терапии. Актуальной задачей становится создание алгоритма, который на основе имеющихся до операции данных о пациенте сможет прогнозировать риск возникновения инфекционных осложнений. Особый интерес при этом представляет выделение набора параметров, значительно влияющих на возникновение таких осложнений.

Описывается полный процесс исследования, состоящий из анализа исходных данных, предварительной обработки данных, выбора моделей машинного обучения и сравнительного анализа результатов.

Для исключения взаимозависимых признаков проводится корреляционный анализ. Пропуски в данных, характерные для реальных медицинских данных, заполняются в соответствии с типом данных. Для обработки категориальных признаков используется One-Hot кодирование. Данные нормализуются для улучшения качества работы моделей машинного обучения.

Название модели	Accuracy	F1 score
RandomForest	0.95	0.52
CatBoostClassifier	0.99	0.9
SVM с нелинейным ядром	0.94	0.62

Таблица 2: Результаты обучения на тестовой выборке.

В данной работе проведен сравнительный анализ трех моделей машинного обучения: RandomForest, CatBoostClassifier и SVM с нелинейным ядром, он представлен в Таблице 1.



Лучший результат показала модель CatBoostClassifier, которая продемонстрировала высокую точность и способность к обобщению.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дьяконов А. Г. Машинное обучение и анализ данных. М. : 2024.
- [2] Бьюгин В. В. Математические основы машинного обучения и прогнозирования. М. : 2018. 484 с.
- [3] Джеф Просиз. Прикладное машинное обучение и искусственный интеллект для инженеров. 2024.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЦЕНАРИЕВ ОТКЛЮЧЕНИЯ УСТАНОВОК ПРОИЗВОДСТВА В ЗАДАЧЕ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Савенкова Надежда Петровна<sup>1</sup>, Артемьева Людмила Анатольевна<sup>2</sup>,  
Мокин Андрей Юрьевич<sup>3</sup>, Дряженков Андрей Александрович<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Лаборатория математического моделирования в физике, e-mail: mknandrew@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: artemieva.luda@gmail.com

<sup>3</sup> Кафедра вычислительных методов, e-mail: mknandrew@mail.ru

<sup>4</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: andrja@yandex.ru

Предложена математическая модель и алгоритм численного решения задачи календарного планирования на участках производства с установками, которые могут работать в двух различных режимах с различными рецептами. На установках входящие и выходящие потоки определяются рецептами производства и мощностью установок. Управление процессом заключается в выборе мощностей установок и нахождении моментов времени, при которых установки переключаются с одного рецепта на другой. Цель управления состоит в том, чтобы к заданному моменту времени  $T$  выполнить план производства, т.е. накопить в резервуарах необходимое количество продукции и выработать заданное количество сырья. При этом предполагается, что план может быть выполнен с одним переключением установок или вовсе без переключений. Допускается отключение установки, что означает равенство нулю ее мощности на некотором промежутке времени.

Процесс планового производства на отрезке времени  $[0, T]$  описывается следующей задачей оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = A_1 y(t) + C_1 g(t), \quad 0 < t < T, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$x(t) \in X, \quad y(t) \in Y, \quad 0 < t < T, \quad x(T) \in S, \quad (2)$$

$$A_2 y(t) + C_2 g(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$$g(t) = B_1 W^{(1)}(t) + B_2 W^{(2)}(t), \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

$$\|Zx(T) - z_T\|_1 \rightarrow \min. \quad (5)$$

Здесь вектор  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in L_2^n[0, T]$ , где  $x_i(t)$  – запас продукции в  $i$ -ом резервуаре,  $y(t) \in L_2^m[0, T]$  – вектор потоков, не инцидентных установкам производства, а  $g(t) \in L_2^l[0, T]$  – вектор потоков, инцидентных установкам,  $x_0$  – начальное состояние резервуаров. Матрицы  $A_1 \in \mathbb{E}^{n \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{E}^{n \times l}$ ,  $A_2 \in \mathbb{E}^{r \times m}$ ,  $C_2 \in \mathbb{E}^{r \times l}$ ,  $B_1, B_2 \in \mathbb{E}^{l \times k}$ ,  $Z \in \mathbb{E}^{p \times n}$  заданы и заполняются по графу производства.

В основе задачи (1)–(5) находятся соотношения материального баланса. Дифференциальное уравнение (1) обеспечивает материальный баланс на резервуарах, уравнение (3) гарантирует материальный баланс на манифолдах. Уравнение (4) определяет величины потоков промежуточной продукции на установках через матрицы рецептов  $B_1, B_2$  установок и их мощности

$$W^{(1)}(t) = (w_1^{(1)}(t), \dots, w_k^{(1)}(t)), \quad W^{(2)}(t) = (w_1^{(2)}(t), \dots, w_k^{(2)}(t))$$

в первом (начальном) и втором (альтернативном) режимах работы соответственно. При отсутствии второго режима на некоторой  $i$ -ой установке соответствующая мощность  $w_i^{(2)}$  считается равной нулю. Элементы матриц  $B_1, B_2$  определяются рецептами производства и обеспечивают материальный баланс на установках.

Задача (1)–(5) представляет собой задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями, в которой роль управлений играют функции  $w_i^{(1)}(t), w_i^{(2)}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . В роли фазовых переменных выступают функции  $x_i = x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Демонстрируется математическое моделирование сценариев переключения установок с одного режима на другой и изменения мощностей работы установок при плановом отключении различных участков производства на известный период времени при условии выполнения календарного плана на один месяц по реализации сырья и производству конечного продукта. Показано, что существуют интервалы времени, на которых работу отдельных установок нельзя прерывать без ущерба выполнения планового задания.

## ВЛИЯНИЕ СТЕКЛОВИДНОГО ТЕЛА НА

### ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ГЛАЗЕ ЧЕЛОВЕКА

Савенкова Надежда Петровна<sup>1</sup>, Складчиков Сергей Андреевич<sup>2</sup>, Лапонин Владислав Сергеевич<sup>3</sup>, Новодержкин Владимир Владимирович<sup>4</sup>,  
Высикайло Филипп Иванович<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Лаборатория математического моделирования в физике, e-mail: savnp@yandex.ru

<sup>2</sup> Лаборатория математического моделирования в физике, e-mail: skladchikov@mail.ru

<sup>3</sup> Кафедра вычислительных методов, e-mail: lap@cs.msu.ru

<sup>4</sup> Городская клиническая больница № 15, e-mail: novoder@yandex.ru

<sup>5</sup> Кафедра теоретической физики МГОУ, e-mail: filvys@yandex.ru

Изучение анатомического строения стекловидного тела (СТ) и его влияние на гидродинамику в глазе происходит уже более 300 лет. Разработанные в

период XVIII–XIX столетий теории строения СТ: альвеолярная (P. Demours), ламеллярная (J.G. Zinn), радиально-секторальная (A. Hannover), фибриллярная (W. Bowman) впоследствии сменились фибриллярной теорией Hannover (1845). Внедрение новых красителей и усовершенствование оборудования позволило исследователям высказывать новые предположения, однако вплоть до настоящего времени СТ признано одной из малоизученных структур. Не изучена роль данной структуры и ее влияние на гидродинамику процессов в глазе.

В данной работе показано, что СТ существенно влияет на динамику внутриглазной жидкости, роль которой в жизни глаза чрезвычайно многогранна. Для исследования этого влияния используется аппарат трехмерного математического моделирования, ввиду сложности, а в некоторых случаях невозможности проведения натуральных экспериментов.

Математическое моделирование позволяет подойти к анализу данной проблематики с другой стороны, а именно детально изучить потоки внутриглазной жидкости в стекловидном теле, особенности формирования и развития вихревого течения в этих потоках, определить зоны повешенной гидродинамической активности и зоны покоя. Описанные зоны формируются благодаря особенностям строения и существования человеческого организма, таким как структура строения стекловидного тела и близлежащего пространства (геометрия, физические характеристики веществ, находящихся внутри стекловидного тела и вблизи него), пульсация кровяного давления, дыхательная волна, температурные особенности человеческого тела и другими. Необходимо отметить, что зона формирования наиболее крупного и устойчивого тороидального вихревого образования в большей части своего объема соответствует границам местоположения стекловидного тела. Результаты наблюдений наталкивают авторов на выводы о том, что такая организация гидродинамических потоков в глазе обеспечивает самоподдержание жизненного цикла функционирования глаза.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sebag J. The Vitreous – Structure, Function, and Pathobiology / Jerry Sebag // New York: Springer-Verlag. – 1989
- [2] Mann I.S. The development of the human eye // Cambridge: The University Press, 1928. – 308 p
- [3] Sebag J. Anatomy and pathology of the vitreo-retinal interface / Jerry Sebag // Eye. – 1992. – Vol. 6. – P. 541-552.
- [4] Mann I.S. The development of the human eye // Cambridge: The University Press, 1928. – 308 p
- [5] Бабич М.Е. Гистофизиология стекловидного тела глаза человека в норме и при патологии: Дис. канд. мед. наук: 14.00.15 / М.Е. Бабич – Владивосток, 2005. – 148 с

- [6] Mathematical modeling of fluid movement inside the eyeball during intravitreal injection / D. V. Lipatov, S. A. Skladchikov, N. P. Savenkova et al. // Российский офтальмологический журнал ( РОЖ). — 2022. — Vol. 15, no. 2. — P. 37–41.
- [7] 4d-исследование вихревых движений жидкостей внутри глаза / С. А. Складчиков, Н. П. Савенкова, Ф. И. Высикайло и др. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. — 2021. — № 5. — С. 73–88.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЕЩЕСТВ ПО СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЕ ЧЕЛОВЕКА С УЧЕТОМ ДЕТОКСИКАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПЕЧЕНИ.**

**Хруленко Александр Борисович, Попко Федор Дмитриевич**

Кафедра вычислительных методов, e-mail: khrulenko@cs.msu.ru, popkofd@my.msu.ru

В современной медицине и фармакологии все более актуальными становятся исследования динамики распространения различных веществ по сердечно-сосудистой системе. Это связано с необходимостью более точного понимания процессов метаболизма лекарственных препаратов, которые зависят от состояния печени и гемодинамики организма. Отдельное внимание уделяется изучению заболеваний печени, например, цирроза, приводящего к портальной гипертензии, которая существенно влияет на фармакокинетику веществ и их выведение из организма. Согласно данным Всемирной организации здравоохранения, заболевания печени и сердечно-сосудистой системы входят в число причин смертности населения в мире [1].

Исследование распределения лекарственных веществ, таких как индоцианин зеленый (ICG), по сердечно-сосудистой системе важно для диагностики и оценки функционального состояния печени. Динамика концентрации ICG в крови зависит от печеночной детоксикационной функции. Компьютерное моделирование таких процессов является востребованным направлением научных исследований и может помочь в оптимизации лечебных стратегий в зависимости от степени поражения печени.

В данной работе рассматривается задача моделирования динамики распространения индоцианина зеленого (ICG) по сердечно-сосудистой системе человека, учитывая детоксикационную функцию печени. Для решения задачи использован программный комплекс CVSS, позволяющий численно рассчитывать концентрацию вещества в крови и оценивать периоды их полувыведения. Результаты моделирования сравнивались с экспериментальными данными, известными из современной медицинской литературы [2, 3]. Моделирование проведено для трех сценариев с учетом критериев тяжести поражения печени по шкале Чайлд-Пью (классы А, В и С), а также анализа влияния уровня давления в воротной вене на динамику выведения ICG.

Результаты исследования могут использоваться для ранней диагностики и оценки состояния печени у пациентов, страдающих циррозом и портальной гипертензией, а также для планирования хирургических вмешательств, таких как шунтирование, направленных на нормализацию гемодинамических и детоксикационных процессов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] [https://gateway.euro.who.int/ru/indicators/hfa\\_236-1860-sdr-chronic-liver-disease-and-cirrhosis-all-ages-per-100-000](https://gateway.euro.who.int/ru/indicators/hfa_236-1860-sdr-chronic-liver-disease-and-cirrhosis-all-ages-per-100-000)
- [2] Дзидзава И. И., Котив Б. Н., Кашкин Д. П., Кочаткова А. А., Бугаев С. А., Смородский А. В., Слободяник А. В. Количественная оценка функции печени методом клиренс-теста с индоцианином зеленым / Кафедра госпитальной хирургии ФГУ ВПО МО РФ Военно-медицинской академии им. С. М. Кирова, Санкт-Петербург.
- [3] Hepatic Venous Pressure Gradient Measurement in Bangladeshi Cirrhotic Patients: A Correlation with Child's Status, Variceal Size, and Bleeding / M. Al Mahtab, S. M. N. E. Alam, M. A. Rahim, M. A. Alam, F. A. Khondaker, A. L. Moben, M. Mohsena, S. M. F. Akbar / Department of Hepatology, Bangabandhu Sheikh Mujib Medical University, Shahbagh, Dhaka, Bangladesh.

## **ОСОБЕННОСТИ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ НВ-2 ПРИ БОЛЬШИХ УГЛАХ АТАКИ**

**Широков Иван Анатольевич**

Кафедра вычислительных методов, e-mail: ivanshirokov@inbox.ru

Квазигазодинамический (КГД) алгоритм расчета течений вязкого теплопроводного газа [1], реализованный на тетраэдральных сетках формата Gmsh, является мощным средством исследования особенностей обтекания тел различной формы потоком газа. Возможно рассмотрение как сверхзвуковых, так и дозвуковых течений, а также стационарных и нестационарных режимах. В работе [2] были исследовано влияние параметров сеток Gmsh на результаты расчетов сверхзвукового обтекания стандартной осесимметричной модели НВ-2 [3] с числом Маха 1.5 и нулевым угле атаки. Показано, что при использовании достаточно качественных сеток возможно хорошее совпадение результатов моделирования с экспериментальными и теоретическими данными.

В данной работе приводятся результаты расчетов газодинамического обтекания модели НВ-2 с числом Маха 1.5 и угле атаки  $29^0$ . Получено достаточно хорошее качественное соответствие картины внешнего обтекания с экспери-

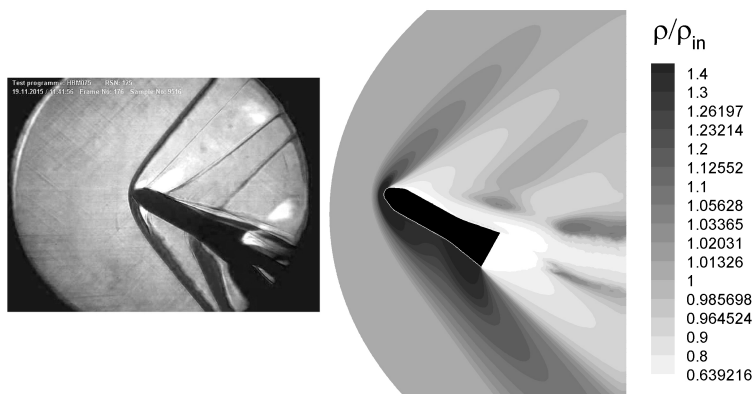


Рис. 1: Визуализация обтекания модели HB-2 с числом Маха 1.5 и углом атаки  $29^{\circ}$ , эксперимент (слева). Распределение относительной плотности газа при соответствующем расчете на основе КГД алгоритма (справа).

ментальными данными из [3]. Также получено разумное соответствие аэродинамических коэффициентов с экспериментальными значениями.

Показано, что КГД алгоритм позволяет проводить достаточно точное моделирование газодинамического обтекания моделей при больших углах атаки. Гибкие возможности генератора сеток Gmsh позволяют строить достаточно качественные сетки на удалении от модели и проводить расчеты картины течения (структуры скачков уплотнения, линий тока и т. п.).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Елизарова Т. Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М: Научный мир, 2007. 349 с.
- [2] Широков И. А., Елизарова Т. Г. Влияние характеристик тетраэдральных сеток на точность моделирования сверхзвукового обтекания осесимметричной модели // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2025. Т. 26, вып. 1.
- [3] Dj. Vukovic, D. Damljanovic. HB-2 high-velocity correlation model at high angles of at-tack in supersonic wind tunnel tests // Chinese journal of aeronautics. 2019. Т. 32(7). P. 1565–1576.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФФУЗИИ В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОЙ СМЕСИ

Шобухов Андрей Вадимович

Кафедра вычислительных методов, e-mail: shobukhov@cs.msu.ru

Исходное математическое описание однокомпонентной диффузии восходит к XIX веку. Оно основывалось на эмпирическом законе Фика. Первая модель многокомпонентной диффузии [1], увязывающая её с термодинамикой, была предложена только в 1931 году. Интерес к этой теме возобновился в 1950-ые годы [2, 3]. Был достигнут значительный прогресс в описании диффузии в газах и жидкостях, однако во всех предложенных моделях коэффициенты диффузии оставались постоянными, а диффузионные члены - линейными относительно концентраций. Нелинейная зависимость коэффициента диффузии от концентрации появилась примерно в то же время в [4, 5, 6]. Однако в этих работах рассматривалось только однокомпонентная диффузия.

В 1986 году в [7] было показано, что для выполнения естественного требования ограниченности концентраций матрица коэффициентов многокомпонентной диффузии должна нелинейно зависеть от концентраций. Там же из закона действующих масс (ЗДМ) была получена модель такой диффузии для смеси веществ. В дальнейшем эта модель изучалась, в частности, в [8, 9].

В настоящей работе на основании ЗДМ мы строим диффузионную модель для бинарной жидкой смеси:

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'' \\ c_2'' \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} -\tilde{D}_1 \cdot c_2 & \tilde{D}_1 \cdot c_2 \\ \tilde{D}_2 \cdot c_2 & -\tilde{D}_2 \cdot c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'' \\ c_2'' \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$c'_{1,2}(t, 0) = 0 \quad ; \quad c'_{1,2}(t, 1) = 0 \quad ; \quad c_{1,2}(0, x) = \varphi_{1,2}(x) \quad ;$$

$$\tilde{D}_1 = \frac{D_1 C_{\max}^2}{L^2} \quad ; \quad \tilde{D}_2 = \frac{D_2 C_{\max}^2}{L^2}.$$

которая обобщает подход [7]. Здесь:  $c_{1,2} = c_{1,2}(t, x)$  - это нормированные на  $[0;1]$  концентрации веществ;  $D_{1,2}$  - их коэффициенты диффузии из молекулярно-кинетической теории;  $C_{\max}$  - концентрация насыщения;  $L$  - размер области. Параметр  $0 \leq \mu \leq 1$  регулирует степень нелинейности:  $\mu = 0$  даёт линейную систему двух уравнений диффузии с диагональной матрицей;  $\mu = 1$  отвечает полностью нелинейной системе из [7].

При любом значении параметра  $0 \leq \mu \leq 1$  для большинства начальных условий решение при  $t \rightarrow \infty$  выходит на постоянное распределение

$$c_1(t, x) \equiv c_1^* = \int_0^1 \varphi_1(\xi) d\xi, \quad c_2(t, x) \equiv c_2^* = \int_0^1 \varphi_2(\xi) d\xi, \quad (2)$$

которое является точным стационарным решением задачи.

Однако не всегда этот стационар является аттрактором всех решений. Нам удалось строго доказать, что если при  $\mu = 1$  начальное распределение удовлетворяет требованию:

$$\varphi_2(x) = 1 - \varphi_1(x), \quad (3)$$

где  $\varphi_1(x)$  – любая гладкая функция, удовлетворяющая  $\varphi_1'(0) = 0$ ,  $\varphi_1'(1) = 0$ , то:

$$c_1(t, x) \equiv \varphi_1(x), c_2(t, x) \equiv \varphi_2(x) \quad (4)$$

то это начальное распределение также является стационарным решением; причём оно устойчиво, так как наблюдается численно. Для чисто диффузионных моделей без химических реакций такое свойство не было известно ранее.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes //Physical Review. 1931. V. 37. P. 405-426.
- [2] Hirschfelder J., Curtiss C., Bird R. Molecular Theory of Gases and Liquids N.Y.: J.Wiley & Sons, 1954.
- [3] Williams F. Elementary derivation of the multicomponent diffusion equation // Amer. Journal of Physics. 1958. V. 26. P. 467-469.
- [4] Philip J. Numerical Solution of Equations of the Diffusion Type with Diffusivity Concentration-Dependent // Transactions of the Faraday Society. 1955. V. 51, P. 885-892.
- [5] Philip J. General Method of Exact Solution of the Concentration-Dependent Diffusion Equation // Australian Journal of Physics. 1959. V. 13, N.1. P. 1-12.
- [6] Crank J. The Mathematics of Diffusion. Oxford University Press, 2nd ed., 1975.
- [7] Gorban A. N., Bykov V.I., Yablonskii G. S. Essays on Chemical Relaxation. Nauka Publishers, 1986.
- [8] Gorban A. N., Sargsyan H. P. Mass Action Law for Nonlinear Multicomponent Diffusion and Relations between its Coefficients // Kinetics and Catalysis. 1986. V. 27. P. 527.
- [9] Gorban A.N., Sargsyan H.P., Wahab H.A. Quasichemical Models of Multicomponent Nonlinear Diffusion. // Math. Model. Nat. Phenom. 2011. V. 6, N. 5. P. 184-262.



## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ КАНОНИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ТЕНЗОРОВ МАЛОГО РАНГА В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ ШУМА

Бабенко Михаил Александрович<sup>1</sup>, Замарашкин Николай Леонидович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Филиал МГУ в г. Сарове, e-mail: mike.babenko2001@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра ВТМ ВМК МГУ, e-mail: nikolai.zamarashkin@gmail.com

В данной работе исследуется возможность ускорения итераций алгоритма переменных наименьших квадратов — ALS [1], в задаче фильтрации гауссова шума в тензорных структурах. Актуальность работы обусловлена тем, что задача фильтрации шума имеет прямое отношение к области беспроводной передачи сигнала MIMO [2], где для успешной работы оборудования требуются быстрые алгоритмы для получения малорангового канонического приближения тензоров в условиях зашумленных данных.

В процесс фильтрации гауссова шума с помощью алгоритма ALS, который изложен в работе [3], добавлено предварительное нахождение приближения тензорным поездом малого ранга при помощи алгоритма TT-SVD [4]. Использование структуры тензорного поезда позволяет снизить сложность одной итерации алгоритма ALS с  $\mathcal{O}(dRn^d)$  до  $\mathcal{O}(dR^3(n+d))$ , где  $d$  — размерность тензора,  $n$  — длина его стороны,  $R$  — канонический ранг.

Показано, что алгоритм TT-SVD может быть использован также для предварительной фильтрации шума. Получена оценка на матожидание погрешности приближения алгоритма вычисления усеченного SVD разложения для фильтрации гауссова шума в матрицах

$$\mathbb{E}\varepsilon_{SVD}(A, N) \leq 4 \frac{\sqrt{2R}(\sqrt{m} + \sqrt{n})}{\sqrt{M}} \mathbb{E}\|N\|_F \quad (1)$$

Здесь  $A$  — комплексная матрица размера  $m$  на  $n$ ,  $M = mn$ ,  $R$  — ранг приближения,  $N$  — матрица гауссова шума. Согласно оценке (1) оптимальная фильтрация шума достигается на квадратных матрицах, откуда следует: чтобы добиться оптимальной фильтрации в алгоритме TT-SVD, необходимо начинать поиск разложения в тензорный поезд с развертки тензора в наиболее квадратную матрицу. Также получена оценка на погрешность такой реализации алгоритма TT-SVD в задаче фильтрации шума в одноранговом случае

$$\mathbb{E}\varepsilon_{TT-SVD}(\mathbf{T}, \mathbf{N}) \leq \frac{4}{\frac{\mathbb{E}\|\mathbf{T}\|_F}{\mathbb{E}\|\mathbf{N}\|_F} \sqrt{M} - 8\sqrt{2}}$$

$\mathbf{T}$  — приближаемый тензор,  $\mathbf{N}$  — гауссов шум,  $M$  — число элементов в тензоре.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Comon P., Luciani X., de Almeida A. L. F. Tensor decompositions, alternating least squares and other tales // Journal of Chemometrics. 2009. vol. 23, № 7-8, pp. 393–405
- [2] Sadek M., Tarighat A., Sayed A.H. A leakage-based precoding scheme for downlink multi-user MIMO channels // IEEE transactions on Wireless Communications. 2007. vol. 6, № 5, pp. 1711–1721.
- [3] Петров С. В. Эффективные методы приближения матриц и тензоров в условиях неполных и зашумленных данных : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 1.1.6 / Петров Сергей Владимирович. Москва, 2023. 129 с.
- [4] Oseledets I. V. Tensor-Train Decomposition // SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. vol. 33, № 5, pp. 2295–2317

## ТОЧНАЯ И ЭФФЕКТИВНАЯ ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ НОРМЫ СВЕРТОЧНЫХ СЛОЕВ НЕЙРОСЕТЕЙ

Гришина Екатерина Романовна<sup>1</sup>, Горбунов Михаил Андреевич<sup>2</sup>, Рахуба Максим Владимирович<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, e-mail: ergrishina@edu.hse.ru

<sup>2</sup> Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, e-mail: gorbunovmikh73@gmail.com

<sup>3</sup> Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, e-mail: mrakhuba@hse.ru

Ограничение спектральной нормы якобиана сверточных слоев сверточных нейросетей повышает их устойчивость к состязательным атакам, обобщающую способность и стабильность во время обучения. Существует много методов для оценки спектральной нормы свертки, однако многие из них завышают оценку, либо их сложность растет с увеличением размеров входного изображения. В нашей работе [1] предлагается новая верхняя оценка для спектральной нормы якобиана сверточного слоя нейросети  $\|T\|_2$ . Оценка основана на спектральной (тензорной) норме четырехмерного ядра свертки.

**Определение 1.** Спектральная норма тензора  $A \in \mathbb{C}^{n_1 \times \dots \times n_d}$  размерности  $d$  определяется [2] как норма функционала:

$$\|A\|_\sigma = \sup_{\substack{u^{(i)} \in \mathbb{C}^{n_i} : \|u^{(i)}\|_2 = 1 \\ i=1, \dots, d}} |[A; u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(d)}]|.$$

Квадратные скобки обозначают сумму по соответствующим размерностям:

$$[A; u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(d)}] = \sum_{i_1, \dots, i_d} A_{i_1, \dots, i_d} u_{i_1}^{(1)} u_{i_2}^{(2)} \dots u_{i_d}^{(d)}.$$

Спектральная норма вычисляется с помощью алгоритма НОРМ [3, 4].

**Теорема 1.** Пусть  $T \in \mathbb{R}^{c_{out}n^2 \times c_{in}n^2}$  - якобиан сверточного слоя со страйдом  $s = 1$  и нулевым паддингом с параметром  $p \geq 0$  или периодическим паддингом. Пусть  $K \in \mathbb{R}^{c_{out} \times c_{in} \times h \times w}$  - ядро свертки. Тогда

$$\|K\|_{\sigma} \leq \|T\|_2 \leq \sqrt{hw}\|K\|_{\sigma}.$$

Известно, что спектральная норма тензора не превосходит норму любой из его разверток, поэтому верхняя оценка в данном неравенстве точнее, чем предложенная в работе [5] оценка через нормы разверток. Оценка в теореме 1 естественным образом обобщается на свертки с любым количеством размерностей и произвольным страйдом [1].

Предложенную верхнюю оценку можно использовать для регуляризации сверточных нейросетей наряду с L2 регуляризацией. В нашей работе [1] также предложены методы ортогональной регуляризации сверточных слоев, основанные на данной оценке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Grishina, E., Gorbunov, M., Rakhuba, M.: Tight and efficient upper bound on spectral norm of convolutional layers. In: European Conference on Computer Vision. pp. 19–34. Springer (2024)
- [2] Lim, L.H.: Singular values and eigenvalues of tensors: a variational approach. In: 1st IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, 2005. pp. 129–132. IEEE (2005)
- [3] De Lathauwer, L., Comon, P., De Moor, B., Vandewalle, J.: Higher-order power method. Nonlinear Theory and its Applications, NOLTA95 1, 4 (1995)
- [4] De Lathauwer, L., De Moor, B., Vandewalle, J.: On the best rank-1 and rank  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  approximation of higher-order tensors. SIAM journal on Matrix Analysis and Applications 21(4), 1324–1342 (2000)
- [5] Singla, S., Feizi, S.: Fantastic four: Differentiable bounds on singular values of convolution layers. In: International Conference on Learning Representations (ICLR) (2021)

## ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА РАБОТЫ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Мяо Цзясюань<sup>1</sup>, Матвеев Сергей Александрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра ВТМ, e-mail: jiaxuanmiao176@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра ВТМ и ИВМ РАН, e-mail: matseralex@gmail.com

В работе исследованы несколько методов анализа чувствительности для нейросетевых моделей. Для начала исследована глобальная чувствительность простой нейронной сети прямого распространения с помощью метода Соболя на примере небольшого набора табличных клинических данных о сахарном

диабете [1]. В результате анализа чувствительности выявлены четыре ведущих параметра, чьи значения влияют на результат работы классификатора. Результаты выполненного анализа сходятся с более простой оценкой набора данных при помощи метода главных компонент, однако глобальный анализ чувствительности позволяет получить более ясное упорядочение входных переменных по важности. Полученные наблюдения могут быть полезными для построения надёжных и интерпретируемых нейросетевых классификаторов в случае табличных данных.

Использование методов глобальной чувствительности для свёрточных нейронных сетей типа VGG-16 оказывается затруднительным даже при обработке небольших изображений набора данных CIFAR-10 из-за гораздо большей размерности вектора входных переменных (3072 переменных для изображений  $32 \times 32 \times 3$  вместо 8 для табличных клинических данных). Вместо этого выполнен локальный анализ чувствительности с помощью тепловых карт при малых случайных возмущениях входных пикселей и с использованием метода максимизации активации [2].

Обнаружено постепенное снижение чувствительности скрытых слоёв сверточной нейронной сети VGG-16 к локальным возмущениям входных пикселей по мере повышения их глубины. Наличие остаточных блоков в архитектуре сети ResNet-18 приводит к сохранению чувствительности глубоких слоёв к локальным возмущениям входных изображений. В то же время использование метода максимизации активации позволяет наглядно продемонстрировать, что модель VGG-16 хорошо извлекает контуры классифицируемых объектов, которые оказываются более чёткими в сравнении с результатами для ResNet-18.

Наконец, на основе модели VGG-16 была выполнена классификация клинических ультразвуковых изображений лёгких, что позволило успешно различать COVID-19, бактериальную пневмонию и нормальные лёгкие [3]. Метод максимизации активации эффективно выявил медицинские признаки, однако некоторые границы были ошибочно распознаны как значимые медицинские особенности, что могло привести к неверной классификации. Поэтому дополнительная предобработка границ изображений является перспективным решением.

Выполненное исследование демонстрирует потенциал применения свёрточных нейронных сетей в медицине, а также возможность использования метода максимизации активации для оценки их научной обоснованности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Соболев И. М. Об оценке чувствительности нелинейных математических моделей // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2. – №. 1. – С. 112-118.

- [2] Матвеев С. А., Оселедец, И. В., Пономарев Е. С., Чертков А. В. Обзор методов визуализации искусственных нейронных сетей. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2021, — Т. 61 — № 5, С.896-910.
- [3] Born J. et al. Accelerating detection of lung pathologies with explainable ultrasound image analysis //Applied Sciences. – 2021. – Т. 11. – №. 2. – С. 672.

## **БЛОЧНЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК**

Сукманюк Софья Владимировна<sup>1</sup>, Желтков Дмитрий Александрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: s.sukman@yandex.ru

<sup>2</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, институт вычислительной математики РАН, e-mail: dmitry.zheltkov@gmail.com

Многие численные методы для решения нестационарных уравнений в частных производных сводятся к решению систем с одной матрицей  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$  и несколькими правыми частями  $B \in \mathbb{C}^{N \times M}$ :

$$AX = B.$$

Наиболее распространёнными итерационными методами для решения линейных систем с одной правой частью являются крыловские методы, которые довольно легко обобщаются на блочные. Однако они имеют следующие недостатки.

- Векторы направлений могут становиться линейно зависимыми. Необходимо производить редукцию блока.
- Работа с блоком из всех правых частей может быть не оптимальна. Для повышения производительности лучше использовать фиксированный размер блока.

Одним из наиболее распространённых крыловских методов является обобщённый метод минимальных невязок (GMRES) [1]. Его блочные версии с дефляцией были разработаны в [2, 3]. Однако при реализации предложенных подходов на практике редукция блока практически всегда происходит только для начальных невязок, что приводит к необходимости проводить частые рестарты.

Таким образом, цель данной работы — разработать блочный метод обобщённых минимальных невязок с новой стратегией дефляции блока и поддержанием фиксированного размера блока. Мы предлагаем осуществлять выбор очередных векторов направлений с помощью редукции блока текущих невязок. При таком подходе редукция будет происходить, когда некоторые невязки сошлись или стали линейно зависимыми. Соответственно, необходимость в частых рестартах для проведения редукции блока отпадает. Более того, так как в методе

GMRES невязки представимы в базисе образа пространства поиска решений, дополнительная сложность для редукции блока несущественна относительно других операций метода.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Youcef Saad, Martin H. Schultz GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on scientific and statistical computing 7. 3. 1986. С. 856–869.
- [2] Gutknecht, Martin H. Block Krylov space methods for linear systems with multiple right-hand sides: an introduction // Modern mathematical models, methods and algorithms for real world systems. Anshan, 2007. С. 420–447.
- [3] Robbé, Mickaël and Sadkane, Miloud Linear algebra and its applications Exact and inexact breakdowns in the block GMRES method // Modern mathematical models, methods and algorithms for real world systems 419. 1. 2006. С. 265–285.

## ПРОТОТИП ПРОГРАММНОГО КОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОДУ МОДЕЛЕЙ БИОГЕОХИМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ В ЭКОСИСТЕМАХ СУШИ

**Файкин Георгий Михайлович, Шангареева Сюзбель Камилевна<sup>1</sup>,  
Степаненко Виктор Михайлович, Медведев Александр Игоревич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: Egorcl6@mail.ru, sumbel.enikeeva@gmail.com

<sup>2</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, e-mail: stepanen@srcc.msu.ru, alexbear95@yandex.ru

Алгоритм описываемый в данной работе представляет собой часть механизма посвящённого работе с моделями углеродного цикла. Большинство существующих моделей углеродного цикла [1] в математическом отношении представляют собой системы дифференциальных уравнений, которые могут быть приведены к общему виду, основанному на понятиях пулов углерода,  $C$  и потоков углерода между ними  $F$ . Пулом углерода мы условно называем природный резервуар содержащий внутри себя некий запас углерода. Поток — скорость перехода содержимого одного резервуара — пула, в другой.

**Система уравнений вида** Система уравнений общего вида для  $N^p$  пулов записывается следующим образом:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N^p} \sum_{k=1}^{N_{i,j}^f} F_{i,j}^k - \frac{\partial (u C_i)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial C_i}{\partial z}, \quad (1)$$

где  $C_i$  — концентрация углерода в  $i$ -м пуле,  $N_{i,j}^f$  — число потоков между  $i$ -м и  $j$ -м пулами,  $F_{i,j}^k$  —  $k$ -й поток между  $i$ -м и  $j$ -м резервуарами,  $u$  — скорость

вертикального адвективного переноса,  $\lambda$  — коэффициент диффузии,  $t$  — время,  $z$  — вертикальная координата. В силу сохранения массы,  $F_{i,j}^k = -F_{j,i}^k$ . Второе и третье слагаемые уравнения (1) описывают процессы вертикальной адвекции и диффузии, которые происходят в растворенной фазе почвенного углерода и вследствие процессов биотурбации, соответственно.

Необходимость в представлении систем уравнений в общем виде, а также однотипный способ получения решения, нужны для сведения многообразия моделей, описывающих природные процессы важные для моделирования углеродных циклов, к единому виду. Это нужно для оптимизации алгоритма решения и для последующего сравнения результатов моделирования в рамках одинаковых условий.

В рамках данного подхода реализованы следующие модели углеродного цикла: INMC[2], SOCS[3], RothC[4]. Использовались следующие внешние данные[5].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Piao S, Sitch S, Ciais P, Friedlingstein P, Peylin P, Wang X, Ahlström A, Anav A, Canadell JG, Cong N, Huntingford C, Jung M, Levis S, Levy PE, Li J, Lin X, Lomas MR, Lu M, Luo Y, Ma Y, Myneni RB, Poulter B, Sun Z, Wang T, Viovy N, Zaehle S, Zeng N. Evaluation of terrestrial carbon cycle models for their response to climate variability and to CO<sub>2</sub> trends. *Glob Chang Biol.* 2013 Jul;19(7):2117-32. Epub 2013 Apr 3. PMID:23504870. doi: 10.1111/gcb.12187
- [2] Stepanenko, V. & Medvedev, Alexander & Bogomolov, Vasiliy & Shangareeva, Sumbel & Ryazanova, Anna & Faykin, Georgiy & Ryzhova, Irina & Suiazova, Victoria & Debolskiy, Andrey & Chernenkov, Alexey. Land surface scheme TerM: the model formulation, code architecture and applications. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* 39. 363-377. (2024). doi: 10.1515/rnam-2024-0031
- [3] Рыжова И. М. Анализ динамики органического вещества почв на основе минимальных моделей круговорота углерода // Почвы-стратегический ресурс России: тезисы докладов VIII съезда Общества почвоведов им. В.В. Докучаева и Школы молодых ученых по морфологии и классификации почв (Сыктывкар, 2020-2022 гг.). Часть 2. — Москва—Сыктывкар: ИБ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, 2021. — с.130–131.
- [4] K. Coleman, and D. Jenkinson, RothC-26.3 - A Model for the turnover of carbon in soil. In: Powlson, D.S., Smith, P., Smith, J.U. (eds) *Evaluation of Soil Organic Matter Models.* NATO ASI Series, vol 38. Springer, Berlin, Heidelberg, (1996). doi:10.1007/978-3-642-61094-3\_17
- [5] Geographic Network Laboratory <https://www.vniia-pr.ru/laboratori/otdl-geoseti/lab-geogr-seti/>. Cited November 01, 2024. [in Russian]

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ УСВОЕНИЯ ДАННЫХ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ УГЛЕРОДНОГО ЦИКЛА

Шангареева Сюзбель Камилевна<sup>1</sup>, Степаненко Виктор Михайлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: s.shangareeva@rcc.msu.ru

<sup>2</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, e-mail: stepanen@srcc.msu.ru

В работе рассматривается применение вариационного метода усвоения данных 4D-VAR для оптимизации параметров модели углеродного цикла SOCS [1]. Модель SOCS, представленная в уравнениях (1–2), описывает динамику двух почвенных пулов углерода: свободного  $C_1$  и защищённого  $C_2$ :

$$\frac{dC_1}{dt} = I - (1 - r) \cdot k \cdot C_1 - rkC_1 \cdot \left(1 - \frac{C_2}{C_m}\right) + k_d C_2, \quad (1)$$

$$\frac{dC_2}{dt} = r \cdot k \cdot C_1 \cdot \left(1 - \frac{C_2}{C_m}\right) - k_d \cdot C_2, \quad (2)$$

где  $C_m$  — максимальное количество органического углерода, которое может быть защищено в почве,  $I$  — поступление органического углерода в почву,  $r$  — доля углерода, переходящая в пул защищенного органического вещества при разложении  $C_1$ ,  $k$  — коэффициент скорости разложения  $C_1$ ,  $k_d$  — коэффициент перехода углерода из  $C_2$  в  $C_1$ . Для оптимизации были выбраны параметры  $k$  и  $k_d$ , а также начальные условия  $C_1(0)$ ,  $C_2(0)$ .

В методе 4D-VAR минимизируется функционал, включающий отклонения от априорной оценки параметров и наблюдений:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} (\theta - \theta_b)^\top B^{-1} (\theta - \theta_b) + \frac{1}{2} \int_0^T [H(C(t; \theta)) - y^{\text{obs}}(t)]^\top R^{-1} [H(C(t; \theta)) - y^{\text{obs}}(t)] dt,$$

здесь  $\theta^\top = (C_1(0), C_2(0), k, k_d)$ ,  $B$  — ковариационная матрица ошибок априорного поля,  $R$  — ковариационная матрица ошибок наблюдений,  $H$  — оператор наблюдения,  $y^{\text{obs}}(t)$  — данные наблюдения в момент времени  $t$ .

Градиент функционала находится с помощью решения сопряженной задачи [2]. Численная реализация включает явную схему Эйлера и адаптивный градиентный метод Adagrad [3]. Оптимизация выполнена для четырех станций на территории России. Также был проведен анализ ковариационной матрицы ошибок оптимального решения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рыжова И. М. Анализ динамики органического вещества почв на основе минимальных моделей круговорота углерода // Почвы—стратегический ресурс России: тезисы докладов VIII съезда Общества почвоведов им. В. В.



Докучаева и Школы молодых ученых по морфологии и классификации почв (Сыктывкар, 2020–2022 гг.). Часть 2. — Москва–Сыктывкар: ИБ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, 2021. — с. 130–131.

- [2] Lewis J. M., Derber J. C. The use of adjoint equations to solve a variational adjustment problem with advective constraints // *Tellus A*. 1985. Т. 37, № 4. С. 309–322.
- [3] Duchi J., Hazan E., Singer Y. Adaptive subgradient methods for online learning and stochastic optimization // *Journal of machine learning research*. 2011. Т. 12, № 7.

## **НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ И СОПОСТАВЛЕНИЯ КЛЮЧЕВЫХ ТОЧЕК НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ РАДУЖНОЙ ОБОЛОЧКИ ГЛАЗА**

**Андреева Елизавета Витальевна, Павельева Елена Александровна**

Кафедра математической физики, e-mail: elizabeth01@bk.ru, pavelyeva@cs.msu.ru

В данной работе представлен метод построения и сопоставления ключевых точек на изображениях радужной оболочки глаза с использованием нейронной сети Key.Net [1], сочетающей в своей архитектуре как результаты работы классических математических методов, так и обучаемые слои сверточной нейронной сети (рис. 1). Модель извлекает признаки на трех уровнях масштабирования, каждый из которых уменьшает дискретизацию изображения с коэффициентом 1.5. Для создания признаков, основанных на математических методах, используются комбинации первых и вторых производных изображения. Они генерируют карты признаков, которые затем объединяются и обрабатываются с помощью набора обучаемых фильтров.

Для обучения нейронной сети используется синтетический набор данных, при создании которого к областям изображений применяются случайные геометрические преобразования, такие как масштабирование, наклон и вращение, а также корректировка контраста и яркости для повышения устойчивости метода к изменениям освещенности.

Сопоставление ключевых точек происходит на основе дескрипторов, построенных с использованием нейронной сети HardNet [2]. Затем применяется фильтрация с учетом показателя уверенности модели и геометрических ограничений для отбора хороших совпадений и удаления выбросов.

Предложенный метод протестирован на изображениях тестовой базы данных CASIA-Iris-V4-Interval [3]. Пример работы алгоритма сопоставления ключевых точек нормализованных изображений радужных оболочек глаз приведен на рис. 2. Метод показал хорошую точность построения и сопоставления ключевых точек на изображениях радужной оболочки глаза.

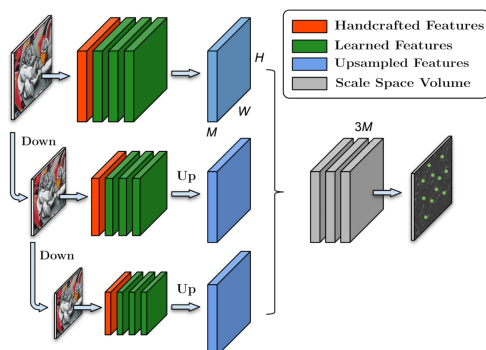


Рис. 1: Архитектура нейронной сети Key.Net.

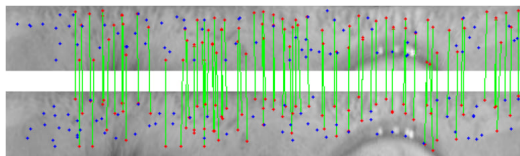


Рис. 2: Пример сопоставления ключевых точек для двух изображений радужной оболочки одного глаза.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Barroso-Laguna A., Mikolajczyk K. Key.Net: Keypoint detection by handcrafted and learned cnn filters revisited // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2022. Т. 45, № 1. С. 698–711.
- [2] Mishchuk A., Mishkin D., Radenovic F., Matas J. Working hard to know your neighbor's margins: Local descriptor learning loss // Advances in Neural Information Processing Systems. 2017. Т. 30. 12 стр.
- [3] Sun Z., Tan T. Casia-Iris-V4-Interval iris image database. URL: <https://hy.casia.github.io/dataset/casia-irisv4/>.

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СЕМЕЙСТВА КДВ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАРДНЕРА

Баев Андрей Владимирович

Кафедра математической физики, e-mail: baev@cs.msu.ru

В рамках модели Ферми–Пасты–Улама для неоднородной решетки получено наиболее общее уравнение семейства КДВ. Это уравнение, обычно упоминае-

мое как уравнение Гарднера, включает как квадратичную так и кубическую нелинейность и содержит переменный коэффициент, характеризующий переменный шаг решетки. Показано, что это уравнение с переменным коэффициентом является точно интегрируемым.

Поставлена и исследована обратная задача определения коэффициента уравнения по моментам импульса и энергии. Эта задача относится к классу обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи. На основе теоремы существования построен алгоритм решения обратной задачи, не требующий решения нелинейного уравнения.

В рамках компьютерного моделирования были проведены численные расчеты, которые продемонстрировали устойчивость предложенного алгоритма решения обратной задачи. Результаты расчетов в докладе представлены в виде 3D компьютерных изображений и графиков. Одним из возможных приложений рассмотренной обратной задачи является обнаружение дислокаций (нарушений) кристаллической решетки.

## **ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ЧИСЛЕННОГО СЕКЦИОНИРОВАНИЯ В КОНФОКАЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ**

**Бажитов Сергей Денисович, Разгулин Александр Витальевич<sup>1</sup>, Ларичев  
Андрей Викторович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра математической физики, e-mail: sbajitov@gmail.com, razgulin@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра медицинской физики, e-mail: larichev@optics.ru

Конфокальные оптические системы широко используются в микроскопии для исследования объектов различной природы, поскольку по сравнению с широкоугольными системами обладают лучшим разрешением при секционировании по глубине ([1]). Особенность конфокальной схемы заключается в том, что объект локально подсвечивается лазерным лучом малого поперечного сечения, а отраженный сигнал собирается светочувствительным детектором. Перемещая источник света, можно считывать информацию из разных частей объекта в поперечной плоскости направлении и по глубине, что актуально для задач медицинской диагностики полупрозрачных живых структур *in vivo* ([2]).

При обработке изображений, регистрируемых в конфокальной оптической системе, возникает задача секционирования трехмерного объекта, состоящая в «очистке» изображений в каждой фокальной плоскости от паразитных изображений соседних по глубине слоев. Обсуждается математическая постановка соответствующей обратной задачи в форме минимизации невязки нелинейного интегрального уравнения. Описывается градиентный метод с динамическим выбором шага на итерациях. Для компенсации шумов применяется тихоновская

регуляризация в поперечном направлении. Обсуждаются вычислительные особенности реализации алгоритма. Показана эффективность градиентного метода с тихоновской регуляризацией для решения обратной задачи секционирования на примере симулированного многослойного объекта, полученного на основе фрагмента изображения глазного дна.

Работа выполнена при поддержке МНОШ МГУ «Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина», соглашение № 23-Ш06-20.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gu M. Principles of Three-Dimensional Imaging in Confocal Microscopes. World Scientific, Singapore, 1996.
- [2] Bille J. F. High Resolution Imaging in Microscopy and Ophthalmology. New Frontiers in Biomedical Optics series, Springer, 2019.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЭВОЛЮЦИИ ИСТОЧНИКА В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОМ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Бочкарев Семен Владиславович<sup>1</sup>, Денисов Александр Михайлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической физики, e-mail: bochkasema@mail.ru

<sup>2</sup> Кафедра математической физики, e-mail: den@cs.msu.ru

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2 u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(x)p(t), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u_x(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  - малый параметр.

При выполнении ряда условий на функции  $f(x)$  и  $p(t)$  для решения задачи (1)-(4)  $u(x, t; \varepsilon)$  справедливо разложение по малому параметру

$$u(x, t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^{2k} F_k(x) p^{(k)}(t) + O(\varepsilon^{2(m+1)}), \quad (5)$$

где

$$F_k(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left( \frac{2}{2n+1} \right)^{2(k+1)} \sin \frac{2n+1}{2} x,$$

а  $f_n$  - коэффициенты разложения функции  $f(x)$  в ряд по Фурье по системе функций  $\sin \frac{2n+1}{2} x$ .

Сформулируем обратную задачу. Пусть функция  $f(x)$  задана, а функция  $p(t)$ , определяющая эволюцию источника во времени, неизвестна. Требуется определить  $p(t)$ , если задана дополнительная информация о решении задачи (1)-(4)

$$u(x_0, t; \varepsilon) = g(t, \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $x_0$  - известная фиксированная точка,  $x_0 \in (0, \pi]$ , а  $g(t, \varepsilon)$  - заданная функция.

Для построения приближенных решений обратной задачи используется разложение (5). Приближенные решения обратной задачи определяются как решения обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. Подобный метод для решения обратных задач для сингулярно возмущенного уравнения теплопроводности был предложен в работе [1].

В докладе приводятся формулы для приближенного решения обратных задач, оценки погрешности при малых  $\varepsilon$  и результаты расчетов, иллюстрирующие эффективность предложенных методов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Денисов А.М. Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2040-2049.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ РАСШИРЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХ НАБОРОВ ДАННЫХ В ЗАДАЧЕ СЕГМЕНТАЦИИ МАТЕРИАЛОВ НА ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Индычко Олеся Игоревна<sup>1</sup>, Коршунов Дмитрий Михайлович<sup>2</sup>, Хвостиков Александр Владимирович<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической физики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: olindyv@mail.ru

<sup>2</sup> Кафедра геологии, геохимии и экономики полезных ископаемых геологического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: dmit0korsh@gmail.com

<sup>3</sup> Кафедра математической физики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: khvostikov@cs.msu.ru

В работе предложен метод автоматического поиска недостающей информации о минералах в задаче сегментации геологических изображений. Целью работы является повышение качества работы нейронной сети за счет пополнения обучающего набора данных.

Поскольку сбор данных для обучения может быть долгим и сложным процессом, требующим участия квалифицированных специалистов, важно выделить для дальнейшей разметки только те минералы, в которых текущая модель

демонстрирует неопределенность (неуверенность). Мы предлагаем новый метод, основанный на гиперболическом активном обучении (HALO) [1], который позволяет автоматически находить такие области.

**Модели и данные.** В работе использовался набор изображений геологических аншлифов LumenStone\*, предназначенный для решения задачи сегментации минералов. На его основании были сформированы три набора данных с различными цвето-яркостными искажениями, соответствующими реальным данным, полученным от специалистов-геологов. В качестве обученных нейросетевых моделей сегментации использовались ResUnet [2] и модифицированная PSPNet [3].

**Предлагаемый метод.** Определение участков изображения, требующих разметки, основано на поиске областей эпистемической неопределенности [4] обученной модели сегментации. Для решения этой задачи был адаптирован метод HALO [1], ключевой идеей которого является использование гиперболического радиуса для оценки неопределенности модели. Наша гипотеза заключается в том, что большие значения гиперболического радиуса соответствуют низкой уверенности модели. Чтобы проверить это, были построены тепловые карты ошибок модели сегментации. Карты ошибок отражают, насколько быстро обученная модель допускает ошибки при цвето-яркостном искажении изображения.

**Результаты.** Для оценки качества предлагаемого метода вычислена корреляция карт гиперболического радиуса и ошибок сегментации. На некоторых минералах значения корреляции достигли 0.62, что подтверждает гипотезу. При помощи разработанного метода удалось значительно сузить участки изображений, требующие разметки специалистами. Метод не требует отдельного обучения и может быть применен для различных архитектур нейронных сетей.

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 24-21-00061).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Khvostikov A. V., Korshunov D. M., Krylov A. S., Boguslavskiy M. A. Automatic Identification of Minerals in Images of Polished Sections // The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. 2021. Vol. 44. P. 113–118.
- [2] Franco L., Mandica P., Kallidromitis K., Guillory D., Li Y.-T., Darrell T., Galasso F. Hyperbolic Active Learning for Semantic Segmentation under Domain Shift // Proceedings of the 41 st International Conference on Machine Learning. 2024. No. 554. P. 13864-13884.
- [3] Zhao H., Jianping S., Xiaojuan Q., Xiaogang Q., Jiaya J. Pyramid Scene Parsing Network. // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2017. P. 6230-6239.

---

\*<https://imaging.cs.msu.ru/en/research/geology/lumenstone>

- [4] Depeweg S., Hernández-Lobato J. M., Doshi-Velez F., Udluft S. Decomposition of uncertainty in bayesian deep learning for efficient and risk-sensitive learning. // International Conference on Machine Learning. 2018.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОДХОДОВ ДЛЯ УЧЁТА КВАНТОВЫХ ЭФФЕКТОВ В ПЛАЗМОННЫХ НАНОЧАСТИЦАХ

Лопушенко Владимир Васильевич<sup>1</sup>, Ерёмин Юрий Александрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Лаборатория математической физики, e-mail: lpushnk@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Лаборатория вычислительной электродинамики, e-mail: eremin@cs.msu.ru

Современные нанотехнологии подразумевают использование структурных элементов с размерами порядка 1–10 нм и субнанометровыми зазорами между ними. В столь малых масштабах классическое описание происходящих процессов становится неточным из-за проявления таких квантовых эффектов как затухание Ландау, нелокальность и смещение облака электронов проводимости относительно поверхности металла [1]. Существующие чисто квантово-механические подходы, такие как теория функционала плотности, зависящей от времени [2], слишком требовательны к вычислительным ресурсам и практически ограничены моделированием структур, состоящих всего из нескольких атомов.

Для описания квантовых эффектов в плазмонных структурах размером от 1 до 10 нм было предложено несколько полуклассических теорий [3], в том числе гидродинамическая теория Друде [1] и ее модификация - теория обобщенного нелокального оптического отклика (GNOR) [3]. Теория GNOR вместе с дополнительными граничными условиями типа Hard-Wall способна учесть нелокальный эффект и затухание Ландау и дает результаты, сопоставимые с другими теориями. Однако, она не учитывает эффекты смещения электронов вблизи поверхности металла.

Квантовые эффекты наноплазмонных структур можно также описать с помощью функций поверхностного отклика (SRF), так называемых  $d$ -параметров Фейбельмана  $d_{\perp}$  и  $d_{\parallel}$  [4]. Действительные части  $d_{\perp}$  и  $d_{\parallel}$  описывают положение центра масс индуцированных зарядов и плотность тока вблизи границы металла соответственно, тогда как мнимые части отвечают за поверхностное поглощение и затухание.  $d$ -параметры Фейбельмана связаны со свойствами двух граничащих друг с другом материалов, но не зависят от геометрии структуры, поэтому их можно применять к плазмонной структуре произвольной формы. Теория SRF позволяет рассматривать квантовые явления в плазмонных наноструктурах в рамках классической теории Максвелла [5] с постановкой новых граничных условий на поверхности металла, которые включают  $d$ -параметры Фейбельмана. Подобный подход имеет решающее значение для изучения мезо-

масштабных плазмонных систем, поскольку он значительно снижает вычислительную сложность модели по сравнению с трудоемким квантомеханическим подходом.

В данной работе исследовано влияние квантовых эффектов на оптические свойства несферических плазмонных наночастиц. Исследование было проведено с использованием теорий GNOR и SRF. Показано, что результаты, полученные с помощью моделей нелокального отклика, могут сильно отклоняться от результатов классической модели как в дальнем поле, так и вблизи поверхности частицы. Обе нелокальные теории указывают на уменьшение амплитуды плазмонного резонанса (ПР) по сравнению с классической моделью и смещению ПР в область более коротких длин волн. В отличие от GNOR, SRF предсказывает большее усиление поля, и эта особенность наблюдалась во всех расчетах. Данный факт согласуется с результатами, полученными другими исследователями для сфер [5]. Результаты моделирования показали, что квантовые нелокальные эффекты более существенны для коэффициента усиления поля на поверхности частицы, чем для сечения экстинкции. В частности, если для сечения экстинкции снижение пика ПР может достигать 40% от максимального значения классического случая, то коэффициент усиления может быть уменьшиться на порядок. Кроме того, было обнаружено, что более плотная среда приводит к увеличению синего сдвига пика ПР до 40 нм.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] David C., de Abajo F. J. G. Surface plasmon dependence on the electron density profile at metal surfaces // *ACS Nano*. 2014. Vol. 8. No. 9. pp. 9558–9566.
- [2] Ullrich C. A. Time-dependent density-functional theory: concepts and application. Oxford Graduate Texts, Oxford University Press, Oxford/New York, 2011.
- [3] Mortensen N. A., Raza S., Wubs M., Søndergaard T., Bozhevolnyi S. I. A generalized non-local optical response theory for plasmonic nanostructures // *Nature Communications*. 2014. Vol. 5. 3809.
- [4] Feibelman P., Surface electromagnetic fields // *Progress in Surface Science*. 1982. Vol. 12. No. 4. pp. 287–407.
- [5] Gonçalves P. A. D., Christensen T., Rivera N., Jauho A.-P., Mortensen N. A., Soljačić M. Plasmon–emitter interactions at the nanoscale // *Nature Communications*. 2020. Vol. 11. 366.



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА—ЛАНДАУ

Тихвинский Даниил Геннадьевич, Федотов Михаил Валентинович<sup>1</sup>,  
Трофимов Вячеслав Анатольевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической физики, e-mail: d.tikhvinskii@gmail.com, fedotov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Южно-китайский университет технологий (SCUT, Guangzhou, China), e-mail: trofimov@scut.edu.cn

Уравнение Гинзбурга—Ландау используется для описания большого числа различных химических и физических процессов [1, 2]. В лазерной физике, в частности, оно описывает распространение лазерного импульса в оптическом волокне, содержащем усилитель [3, 4].

В данной работе рассматривается уравнение Гинзбурга—Ландау, описывающее распространение светового импульса в оптоволокне, записанное относительно медленно изменяющейся комплексной амплитуды  $A(z, t)$ :

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + (v_r + iv_i) \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + (D_{2\omega} + iD_2) \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} + ((\delta + i\alpha)|A(z, t)|^2) + (0.5\delta_0 + in_0) A(z, t) = 0, 0 < z \leq L_z, 0 < t < L_t \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$A(z, t)|_{z=0} = e^{-(t-\frac{L_t}{2})^2}, \quad (2)$$

$$A(z, t)|_{t=0} = 0, A(z, t)|_{t=L_t} = 0, 0 \leq t \leq L_t, 0 \leq z \leq L_z. \quad (3)$$

Линейный дифференциальный оператор задачи (1)–(3) аппроксимировался конечно-разностной схемой Кранка—Николсона. Поскольку построенная разностная схема нелинейна, то применялся итерационный процесс, в котором нелинейная часть уравнения вычислялась на предыдущей итерации. Полученные уравнения решались с помощью метода прогонки (Thomas algorithm).

Построенная разностная схема была консервативной и на ее решении сохранялись разностные аналоги инвариантов дифференциальной задачи [5].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ginzburg V. L. On the theory of superconductivity. In On Superconductivity and Superfluidity // Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2009.
- [2] Ginzburg V. L. Superconductivity and superfluidity (what is done and what is not done) // Phys.-Uspekhi 1997, 40, 407–432.
- [3] Agrawal G. P. Optical pulse propagation in doped fiber amplifiers // Phys. Rev. A 1991, 44, 7493–7501.
- [4] Agrawal G. P. Applications of Nonlinear Fiber Optics // Academic Press: Rochester, NY, USA, 2008.

- [5] Conservative Finite-Difference Scheme for 1D Ginzburg–Landau Equation / V. A. Trofimov, M. M. Loginova, M. V. Fedotov, D. G. Tikhvinskii, Y. Yang, B. Zheng // Mathematics 2022, 10(11), paper number 1912.

## ВЛИЯНИЕ СЛАБОЙ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ НА ПРОЦЕСС УДВОЕНИЯ ЧАСТОТЫ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Харитонов Дмитрий Михайлович<sup>1</sup>, Трофимов Вячеслав Анатольевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической физики, e-mail: dmitrykharitonov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Shiang-Ming Wu School of Intelligent Engineering of SCUT, Guangzhou, China, e-mail: trofimov@scut.edu.cn

Каскадные процессы, возникающие в отсутствии фазового синхронизма (в т.н. каскадном пределе) при взаимодействии лазерного излучения с нелинейными средами, хорошо изучены в литературе. В первую очередь они известны в контексте квадратичных солитонов: в среде с квадратичным нелинейным откликом в результате несинхронизированных процессов генерации второй гармоники (ГВГ) и генерации разностной частоты возникает индуцированный отклик подобный эффекту Керра [1]. Также известны возможности использования каскадных процессов для преобразования частоты лазерного излучения: несинхронизированные процессы ГВГ и генерации суммарной частоты приводят к перекачки энергии в волну с утроенной частотой [2].

Однако, влияние, которое оказывают каскадные процессы на эффективность преобразования частоты лазерного излучения, в том случае, когда они являются побочными, изучено гораздо меньше. В данной работе мы исследуем влияние каскадных процессов, связанных со слабой генерацией третьей гармоники (ГТГ), на классический для нелинейной оптики процесс ГВГ. Для этого исследуется система из трёх нелинейных уравнений типа Шрёдингера, описывающих взаимодействие волн с частотами  $\omega$ ,  $2\omega$  и  $3\omega$  в среде с комбинированным квадратичным и кубичным нелинейным откликом [3]. Используются предположения большой фазовой расстройки процесса ГТГ и достижения фазового синхронизма процесса ГВГ или нахождения вблизи него.

При помощи метода многих масштабов [4] введённая система сводится к упрощённой системе дифференциальных уравнений, называемой далее модифицированной. В нулевом приближении эта система совпадает с системой нелинейных уравнений типа Шрёдингера, описывающей взаимодействие волн с частотами  $\omega$  и  $2\omega$  без учёта волны третьей гармоники. В первом приближении в модифицированную систему добавляются нелинейные слагаемые третьей, четвёртой и пятой степени, описывающие побочные каскадные процессы, связанные со слабой третьей гармоникой.

Компьютерное моделирование показало, что нулевое приближение является достаточно точным, только если решения модифицированной системы в этом приближении являются периодическими. В случае непериодических решений,

побочные каскадные процессы начинают оказывать существенное влияние на процесс ГВГ, следовательно, необходимо использовать первое приближение. Влияние может быть как отрицательным (снижение эффективности процесса ГВГ), так и положительным (повышение эффективности за счёт переключения из низкоэффективного режима в высокоэффективный при существовании бистабильного режима генерации).

Д.М. Харитонов благодарит Московский центр фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2022-284) за финансовую поддержку работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Optical solitons due to quadratic nonlinearities: from basic physics to futuristic applications. / A. v. Buryak, P. Di Trapani, D. V. Skryabin, S. Trillo // *Physics Reports*. 2002. Т. 370. № 2. С. 63-235.
- [2] Высокоэффективная генерация третьей гармоники в среде с квадратичной и кубической нелинейностями в результате каскадной генерации второй гармоники / В. А. Трофимов, Д. М. Харитонов, М. В. Федотов, Ю. Ян, Ч. Дэн // *Квантовая электроника*. 2023. Т. 53, № 8. С. 645–660.
- [3] Effective lensing effects in parametric frequency conversion. / B. Zheng, V. A. Trofimov, D. M. Kharitonov, M. V. Fedotov, Y. Yang, D. Wang // *Proceedings of SPIE*. 2004. Т. 12869, С. 161-174.
- [4] Nayfeh, A. H. *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons, 2024.

## **О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЕКЦИОННОГО БЕЗГРАДИЕНТНОГО СПУСКА В ЗАДАЧЕ КАЛИБРОВКИ МОДЕЛИ ARMA-GARCH БАЗОВОГО АКТИВА ПО РЫНОЧНЫМ ЦЕНАМ ОПЦИОНОВ**

**Арбузов Петр Андреевич<sup>1</sup>, Голембиовский Дмитрий Юрьевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: arbuзов.parb@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: goLemb@cs.msu.ru

Рыночные цены опционов зачастую отличаются от цен, предполагаемых теоретическими моделями. Это означает, что у участников рынка есть свое представление о будущем распределении стоимости базового актива. В работе представлена задача калибровки модели ARMA-GARCH доходностей базового актива на основе рыночных цен опционов на этот актив в форме задачи стохастической оптимизации.

Для решения поставленной задачи применяется метод стохастического проекционного безградиентного спуска [1]. В процессе калибровки для вычисления

значений функции потерь применяется метод Монте-Карло, а для построения гладкой аппроксимации стохастического градиента используется метод случайного сглаживания [2]. В работе приводится доказательство сходимости алгоритма калибровки модели к  $(\delta, \epsilon)$ -стационарной точке Гольдштейна со скоростью порядка  $O(d^{\frac{3}{2}}\delta^{-1}\epsilon^{-4})$ . В завершение в работе представлены численные результаты калибровки модели на исторических данных о рыночных ценах опционов, а также приведены результаты статистического тестирования точности полученных распределений будущей стоимости базового актива.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Ghadimi, G. Lan, and H. Zhang. Mini-batch stochastic approximation methods for nonconvex stochastic composite optimization. *Mathematical Programming*. 2016. Т. 155. № 1-2. С. 267–305.
- [2] Y. Nesterov and V. Spokoiny. Random gradient-free minimization of convex functions. *Foundations of Computational Mathematics*. 2017. Т. 17. С. 527–566.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОДХОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ РИСКА ПАДЕНИЯ НА ОСНОВЕ ХАРАКТЕРИСТИК ШАГА

Белянкин Георгий Андреевич, Забелло Мария Алексеевна

Кафедра исследования операций, e-mail: gbelyank@mail.ru, mariya.zabello@mail.ru

Заболевания опорно-двигательного аппарата и возрастные изменения в организме являются основными факторами риска падений у людей, что приводит к значительным физическим травмам и инвалидности [1].

Целью данной работы является прогнозирование риска падения с использованием подходов машинного обучения. Определяются отклонения в движениях и координации, а также показатели, свидетельствующие о нарушении баланса у пациентов. Результатом исследования стал обзор существующих методов прогнозирования риска падений и создание прототипа механизма для их автоматического выявления.

Для формирования признаков, необходимых для обучения моделей прогнозирования риска падения, первоначально была использована нейросетевая архитектура для извлечения 16 ключевых точек суставов из видеопотока. Для дальнейшей обработки координат данные были очищены и избавлены от линии тренда (направления координат, полученного из-за отдаления и приближения человека к камере). На основе смещённых координат суставов были вычислены 63 признака, включающие в себя различные биомеханические параметры, такие как длины конечностей, углы сочленений и другие кинематические характеристики, позволяющие количественно описать динамику движения.

В рамках данной работы были рассмотрены три метода машинного обучения: дерево решений, случайный лес и одна из имплементаций градиентного бустинга [2].

Метод дерева решений основывается на построении модели в виде иерархической структуры, где каждый узел представляет собой проверку одного из признаков, а ветви — результат этой проверки. Конечные листья дерева содержат предсказания, основанные на значениях признаков, разделяющихся на каждом узле.

Случайный лес является ансамблевым методом, использующим множество деревьев решений, обученных на различных подмножествах данных с помощью метода случайной выборки. Предсказание случайного леса можно выразить как среднее или большинство предсказаний деревьев [3].

Градиентный бустинг представляет собой технику, при которой строится ансамблевая модель, комбинирующая несколько базовых (слабых) алгоритмов для улучшения точности предсказаний. Каждый новый элемент ансамбля обучается на ошибках предыдущего, и на каждом шаге минимизируется градиент ошибки. Обучение градиентного бустинга можно выразить через обновление предсказания с использованием градиента функции потерь [3].

В проведенном исследовании к признакам, свидетельствующим о нарушении баланса у пациентов, были применены три вышеупомянутых метода машинного обучения. Проведен сравнительный анализ методов на валидационной выборке. Для этой цели использовались основные регрессионные метрики и распределение ошибок [4].

Model	MAE	MSE	RMSE	R2
Decision Tree	14.918	390.464	19.760	0.033
<b>Random Forest</b>	12.680	291.340	17.069	0.278
LGBM	13.258	314.845	17.744	0.220

Таблица 3: Основные регрессионные метрики

В результате сравнения лучший результат показал случайный лес. Это объясняется тем, что данный алгоритм подходит в случаях, когда необходима стабильная модель с хорошей обобщающей способностью для работы с зашумленными данными. Также случайный лес демонстрирует меньшую склонность к переобучению по сравнению с градиентным бустингом [2], особенно в условиях ограниченного объема данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] The Identification of Elderly People with High Fall Risk Using Machine Learning Algorithms / Ziyang Lyu, Li Wang, Xing Gao, Yingnan Ma // Healthcare 2023 P. 11–13.

- [2] LightGBM: A Highly Efficient Gradient Boosting Decision Tree / Guolin Ke, Qi Meng, Thomas Finley, Taifeng Wang, Wei Chen, Weidong Ma, Qiwei Ye, Tie-Yan Liu // Neural Information Processing Systems. 2017. P. 6–8.
- [3] Bishop Christopher M. Pattern Recognition and Machine Learning Springer, 2006.
- [4] Investigation of performance metrics in regression analysis and machine learning-based prediction models / Vagelis Plevris, German Solorzano, Nikolaos P. Bakas, Mohamed El Amine Ben Seghier // The 8th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. 2022. P. 5–11.

## **ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАКОПИТЕЛЕМ ЭНЕРГИИ С УЧЕТОМ САМОРАЗЯДКИ**

**Васин Александр Алексеевич, Цыганов Никита Игоревич**

Кафедра исследования операций, e-mail: [vasin@cs.msu.su](mailto:vasin@cs.msu.su), [nikita--93@mail.ru](mailto:nikita--93@mail.ru)

Во многих странах мира электроэнергетика модернизируется за счет всеместного внедрения накопителей энергии. Накопители энергии могут быть полезны для потребителей: при низких ценах потребители запасают в них энергию, а при высоких ее используют. В наших предыдущих работах [1, 2] была доказана возможность сведения задачи оптимизации для потребителя, использующего накопитель, к решению отдельных задач оптимизации потребления и управления накопителем. Получены эффективные методы расчета оптимальной стратегии хранения с точки зрения перепродажи энергии для накопителей без существенной саморазрядки. Однако для нескольких важных типов накопителей энергии (FES, SCES, SMES, ZEBRA, см. [3]) такие потери энергии играют существенную роль. Саморазрядка этих устройств, в зависимости от условий, может приводить к потерям от 10% до 40% энергии в день. При этом существенную роль в расчете оптимального управления для некоторых накопителей играет еще один параметр: минимальный допустимый уровень загрузки накопителя.

В настоящей работе рассматривается задача оптимизации управления накопителем в условиях значительной саморазрядки. Владелец устройства может покупать энергию по фиксированным тарифам или по ценам оптового рынка и продавать ее обратно в сеть по этим ценам. Он стремится максимизировать свою прибыль от перепродажи энергии в заданном интервале планирования. Мы получаем эффективный алгоритм расчета оптимальной стратегии накопителя в общем случае. В типичном случае оптимальное управление включает несколько последовательных циклов. Каждый из них содержит начальный этап загрузки накопителя до максимального объема, несколько этапов его дозагрузки, связанных с саморазрядкой, после чего осуществляется последняя дозагрузка и полная разгрузка накопителя.

Приводятся примеры расчета оптимальной стратегии и прибыли некоторых накопителей с учетом суточных тарифов на электроэнергию, действующих в России и некоторых других странах. Первый тип тарифов включает пять интервалов постоянной цены: ночной интервал, утренний пик, дневной полупик и вечерние пик и полупик. Второй тип тарифов включает четыре интервала: ночной интервал, утренний полупик, пик и вечерний полупик. Для каждого типа мы определяем оптимальные стратегии управления и прибыли в зависимости от объема, приходящегося на один кВт мощности накопителя.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vasin A. A., Grigoryeva O. M. Optimal strategies of consumers with energy storages in electricity market // *Communications in Computer and Information Science*, Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland. 2022. P. 300–312.
- [2] Васин А. А., Григорьева О. М., Серегина И. Ю. Оптимизация параметров накопителей для потребителей на рынке электроэнергии // *Вестн. Моск. ун-та. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн.* 2023. № 1. С. 21–27.
- [3] Comparative review of energy storage systems, their roles, and impacts on future power systems / F. Nadeem, S. M. Suhail Hussain, P. Kumar Tiwari, A. Kumar Goswami, T. Selim Ustun // *IEEE Access* 7. 2018. P. 4555–4585. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2888497

## ОЦЕНКИ ДОХОДНОСТИ ИНВЕСТИЦИЙ В НАКОПИТЕЛИ ЭНЕРГИИ

**Васин Александр Алексеевич, Цыганов Никита Игоревич, Саносян Генри Андраникович, Абдулаев Саид Юсупович**

Кафедра исследования операций, e-mail: vasin@cs.msu.su, nikita--93@mail.ru

Развитие электроэнергетики является важной задачей для ускорения экономического роста в России. Использование новых экономических и технических инструментов для оптимизации производства и потребления электроэнергии играет важную роль в этом процессе. Для рынков электроэнергии характерны большие перепады цен между пиковыми периодами с большими объемами потребления и ночными периодами с низким потреблением. В этой ситуации полезную роль для потребителя может сыграть накопитель энергии: потребитель накапливает в нем энергию при низких ценах и использует ее при высоких ценах.

Цель настоящей работы - оценка доходности инвестиций в разные типы накопителей на разных рынках. Рассматриваются два типа суточных тарифов на электроэнергию. Первый тип соответствует российскому рынку, второй - рынкам Великобритании, Индии и ряда других стран. Обычно оценка инвестиционной доходности основывается на расчете чистой приведенной стоимости

(ЧПС) потока затрат и доходов, соответствующих данной инвестиции. При этом будущие платежи дисконтируются с учетом банковской процентной ставки для безрисковых вложений. В случае накопителей основная компонента затрат - единовременная стоимость покупки накопителя данного типа с определенными значениями мощности (скорости загрузки и разгрузки) и объема накопителя. При пропорциональном изменении характеристик накопителя можно использовать одинаковую стратегию управления, пропорционально меняя поток энергии между ним и внешней сетью. Удельная доходность при этом не меняется. Поэтому для каждого типа накопителей рассматриваются мощность 1 кВт и емкость  $e$  кВт\*ч.

В случае, когда цены на энергию и стоимости накопителей меняются в соответствии с банковской процентной ставкой и инвестиция приносит доход с учетом инфляции, оптимальная стратегия включает реинвестирование получаемой прибыли в увеличение мощности используемых накопителей. Динамика мощности при этом описывается уравнением  $p_{t+1} = p_t \left( 1 - k + \frac{Pr(e)}{c(e)} \right)$ , где  $k$  - коэффициент износа оборудования,  $c(e)$  - стоимость накопителя с объемом  $e$ ,  $Pr(e)$  - максимальная суточная прибыль для накопителя с данным объемом.

В работе решается задача оптимизации темпа роста  $1 - k + \frac{Pr(e)}{c(e)}$  и определяется оптимальный объем накопителя в зависимости от тарифного плана. На основе данных о накопителях различных типов [1] рассчитываются инвестиционные доходности и указываются типы накопителей, представляющие интерес с точки зрения инвестиций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Comparative review of energy storage systems, their roles, and impacts on future power systems / F. Nadeem, S. M. Suhail Hussain, P. Kumar Tiwari, A. Kumar Goswami, T. Selim Ustun // IEEE Access 7. 2018. P.4555–4585. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2888497

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ЛОЖНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ И ОДНОЗНАЧНЫХ ПРИЗНАКОВ В НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ

Глушко Алиса Алексеевна<sup>1</sup>, Измаилов Павел Алексеевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: s02230355@gse.cs.msu.ru

<sup>2</sup> New York University, e-mail: pi390@nyu.edu

Современные нейросетевые модели, несмотря на их высокую эффективность, часто действуют как «черные ящики», что вызывает трудности в интерпретации их решений. Такая непрозрачность ограничивает доверие к выводам моделей и может приводить к принятию неверных решений, особенно в критически важных областях.

Существует алгоритм интерпретации признаков с помощью разреженного автокодировщика [1]. Идея алгоритма заключается в том, чтобы представить



выход слоя нейронной сети в пространстве большей размерности. Дальнейший анализ такого пространства позволяет обнаружить закономерности, на основании которых модель принимает решение.

Нейронные сети могут делать предсказания, основываясь на закономерностях, не имеющих отношение к предсказываемому значению. Такие закономерности называют ложными корреляциями [2]. Примером может служить задача классификации птиц по изображению на водных и сухопутных. На большей части таких фотографий водные птицы находятся в воде, а сухопутные на суше. Это приводит к тому, что нейронная сеть начинает классифицировать все изображения, на которых есть вода, как изображение с водными птицами, а изображения, на которых только суша, как изображения с сухопутными птицами.

В данной работе изучается применимость алгоритма интерпретации признаков из статьи [1] к задачам классификации изображений с ложными корреляциями. В частности рассматривается задача классификации изображений людей с использованием датасета CelebA [3]. В данной задаче ложнокоррелирующий признак — это пол человека. Целью этой работы является изучение признаков, которые обнаружены с помощью автокодировщика, в контексте метода борьбы с ложными корреляциями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Towards Monosemanticity: Decomposing Language Models With Dictionary Learning / T. Bricken, A. Templeton, J. Batson, B. Chen, A. Jermyn, T. Conerly, N. L. Turner, C. Anil, C. Denison, A. Askell, R. Lasenby, Y. Wu, S. Kravec, N. Schiefer, T. Maxwell, N. Joseph, A. Tamkin, K. Nguyen, B. McLean, J. E. Burke, T. Hume, S. Carter, T. Henighan, C. Olah // Transformer Circuits Thread. 2023.
- [2] Kirichenko P., Izmailov P., Wilson A. G. Last Layer Re-Training is Sufficient for Robustness to Spurious Correlations. 2023.
- [3] Deep learning face attributes in the wild / Z. Liu, P. Luo, X. Wang, X. Tang // Proceedings of the IEEE international conference on computer vision. 2015. P. 3730–3738.

## БАЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ ПОРТФЕЛЯ

Е Цзыхао<sup>1</sup>, Дмитрий Юрьевич Голембиовский<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра Исследования операций, e-mail: yezihao0510@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра Исследования операций, e-mail: golembo@cs.msu.su

В данной работе рассматривается применение байесовского подхода для управления портфелем на основе модели Марковица. Используются вероятностные методы для оценки параметров доходности и ковариационной матрицы

рисков. Байесовский анализ позволяет адаптивно учитывать неопределенность и улучшать стабильность инвестиционных решений.

**Модель Марковица.** Модель Марковица [1] — основа портфельной теории. Предполагается, что инвестор имеет исторические данные о доходности портфеля на периоде момент времени  $T$  и на основании их инвестор хочет инвестировать в портфель до момента времени  $T + 1$  в будущем. Чтобы проанализировать возможную доходность этого инвестиционного портфеля, можно найти оптимальный портфель ( $W$ ) при помощи модели Марковица:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \sigma_p^2 = W' \Sigma W \\ & \text{subject to } \sum_{i=1}^n u_i w_i = W' \mu = \mu_p, \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1. \end{aligned}$$

где,  $\mu_p$  — ожидаемая доходность портфеля,  $\Sigma$  — ковариационная матрица. Получим оптимальный вектор распределения портфеля активов:

$$W^* = \Sigma^{-1}(\lambda_1 \mu + \lambda_2 I_n) = \frac{c \mu_p - b}{ac - b^2} \Sigma^{-1} \mu + \frac{a - b \mu_p}{ac - b^2} \Sigma^{-1} I_n \quad (1)$$

где,  $a = \mu' \Sigma^{-1} \mu$ ,  $b = \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu$ ,  $c = \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}$ .

Тогда нужно только подставить ожидание доходности портфеля  $\mu_p$ , оценку вектора математического ожидания доходности актива  $\mu$  и оценку ковариационной матрицы доходности актива  $\Sigma$  в  $W^*$ , чтобы получить оптимальный вес портфеля.

**Байесовский метод для оценивания параметров Модели Марковица  $\mu$  и  $\Sigma$ .** Рассмотрим портфель, состоящий из  $n$  акций. Предполагается, что вектор доходности активов  $R_t$  в момент времени  $t$  за период времени  $T$  соответствует  $N$ -мерному многомерному нормальному распределению.

$$R_t = (R_{1,t}, R_{2,t}, \dots, R_{N,t})' \quad (2)$$

$$R_t \sim \mathcal{N}_N(\mu, \Sigma) \quad (3)$$

Байесовский метод предполагает, что параметры  $\mu$  и  $\Sigma$  являются случайными величинами. Согласно теореме Байеса [3], апостериорное распределение доходности активов будет следующим:

$$P(\mu, \Sigma | R) \propto P(R | \mu, \Sigma) P(\mu, \Sigma) \quad (4)$$

Предполагаем, что нет никакой априорной информации о параметрах  $\mu$  и  $\Sigma$ , тогда для параметров  $\mu$  и  $\Sigma$  следует неинформативное априорное распределение, то есть распределение Джеффри [6]:

$$P(\mu, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-\frac{(N+1)}{2}} \quad (5)$$

На основе апостериорного распределения предсказанной доходности активов определяется как:

$$P(R_{T+1}|R_1, \dots, R_T) = \int \int P(R_{T+1}|\mu, \Sigma)P(\mu, \Sigma|R_1, \dots, R_T)d\mu d\Sigma \quad (6)$$

Получим распределения:

$$R_{T+1}|\mu, \Sigma \sim \mathcal{N}_N(\mu, \Sigma) \quad (7)$$

$$\mu|\Sigma, R_1, \dots, R_T \sim \mathcal{N}_N(\hat{\mu}, \frac{\Sigma}{T}) \quad (8)$$

$$\Sigma|R_1, \dots, R_T \sim Inv - Wishart_N(\sum_{i=1}^T (R_i - \hat{\mu})(R_i - \hat{\mu})', T - 1) \quad (9)$$

Следовательно распределение предсказанной доходности является многомерным распределением Стьюдента со степенями свободы  $T - N$ :

$$R_{T+1}|R \sim T_{T-N}(\hat{\mu}, \frac{(1 + \frac{1}{T})(T - 1)}{T - N}\hat{\Sigma}). \quad (10)$$

где,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T R_t \quad (11)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T - 1} \sum_{i=1}^T (R_t - \hat{\mu})(R_t - \hat{\mu})' \quad (12)$$

**Результаты моделирования торговли.** Для проверки эффективности байесовского подхода была проведена серия экспериментов. В качестве примера рассмотрен портфель, состоящий из 17 акций, выбранных из индекса S&P 500. Для каждой акции были рассчитаны апостериорные оценки доходности и ковариационной матрицы. Далее оптимальные веса портфеля были определены с использованием байесовской версии модели Марковица.

Был проведен симуляционный эксперимент, в котором сравнивались два подхода:

1. Фиксированные веса портфеля, рассчитанные на основе исторических данных.
2. Динамическое пересчитывание весов портфеля на основе байесовского обновления параметров.

График результата моделированной торговли:

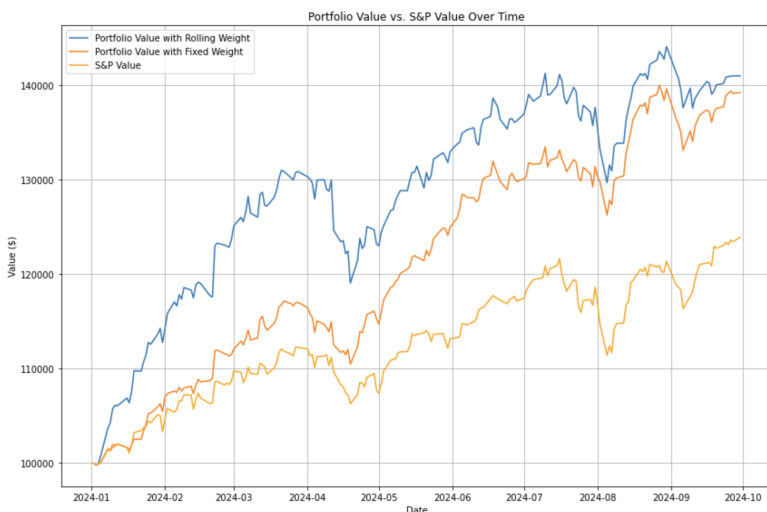


Рис. 1: Результат торговли.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Markowitz, H. Portfolio Selection. *\*Journal of Finance\**, 1952.
- [2] Black, F., Litterman, R. Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium. *\*Journal of Fixed Income\**, 1992.
- [3] Гроот, Де. Оптимальные статистические решения, 1974.
- [4] Anderson, T. W., Olkin, I. Maximum-likelihood estimation of the parameters of a multivariate normal distribution. *\*Linear Algebra and its Applications\**, 1985.
- [5] Johnson, R. A., Wichern, D. W. *\*Applied Multivariate Statistical Analysis\**. Prentice Hall, 2002.
- [6] Bernardo, J. M. Reference posterior distributions for Bayesian inference. *\*Journal of the Royal Statistical Society Series B\**, 1979.
- [7] Hasannasab, M., Hertrich, J., Laus, F., Steidl, G. Alternatives to the EM algorithm for ML estimation of location, scatter matrix, and degree of freedom of the Student-t distribution. *\*Numerical Algorithms\**, 2021.

[8] Rachev, S. T., Hsu, J. S. J., Bagasheva, B. S., Fabozzi, F. J. \*Bayesian Methods in Finance\*. John Wiley & Sons, 2008.

[9] Greub, W. H. \*Linear Algebra\*. Springer, 2012.

## МЕТОДЫ ЛЕВЕНБЕРГА–МАРКВАРДА И МЕТОДЫ НЬЮТОНА С ПОДЗАДАЧАМИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С КОМПЛЕМЕНТАРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Измаилов Алексей Феридович, Янь Чжибай

Кафедра исследования операций, e-mail: izmaf@cs.msu.ru, yanzb@smbu.edu.cn

Рассматривается задача оптимизации с комплементарными ограничениями

$$f(x) \rightarrow \min, \quad G(x) \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad \langle G(x), H(x) \rangle = 0, \quad (1)$$

где  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция,  $G, H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкие отображения. Такие задачи имеют многочисленные приложения в разных областях, таких как двухуровневые задачи оптимизации, задачи оптимизации на множествах параметрических равновесий, и др. [1]. Главная трудность, связанная с такими задачами, состоит в нарушении традиционных условий регулярности ограничений в каждой допустимой точке.

Система условий первого порядка оптимальности для задачи (1) имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda, \mu) = 0, \quad \langle G(x), H(x) \rangle = 0,$$

$\mu^G \geq 0, G(x) \geq 0, \langle \mu^G, G(x) \rangle = 0, \quad \mu^H \geq 0, H(x) \geq 0, \langle \mu^H, H(x) \rangle = 0,$   
где  $\mu = (\mu^G, \mu^H)$ , а  $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$  — функция Лагранжа задачи (1):

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda \langle G(x), H(x) \rangle - \langle \mu^G, G(x) \rangle - \langle \mu^H, H(x) \rangle.$$

Эту систему можно эквивалентным образом переформулировать как уравнение с ограничением

$$\Phi(u) = 0, \quad u \in P, \quad (2)$$

где  $\Phi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  — некоторое заданное отображение, а  $P \subset \mathbb{R}^p$  — замкнутое выпуклое множество.

В работе рассматриваются следующие переформулировки:  $p = n + 2m + 1$ ,  $q = n + 3m$ ,

$$P = \{u = (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m) \mid G(x) \geq 0, H(x) \geq 0\},$$

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda, \mu) \\ G(x) \circ H(x) \\ \mu^G \circ G(x) \\ \mu^H \circ H(x) \end{pmatrix},$$

где  $\circ$  — произведение Адамара, или

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda, \mu) \\ \min\{G(x), H(x)\} \\ \min\{\mu^G, G(x)\} \\ \min\{\mu^H, H(x)\} \end{pmatrix}.$$

Также используются переформулировки со слэками, позволяющие задать множество  $P$  только условиями неотрицательности на часть переменных.

Из-за нарушения традиционных условий регулярности ограничений для задачи (1) решения соответствующих уравнений с ограничениями (2) всегда неизолированы, что требует применения методов, ориентированных на этот случай, таких, как методы Левенберга–Марквардта [2] и LP-Newton [3]. В работе проведен численный эксперимент на выборки задач из коллекции МасМРЕС, демонстрирующий, что данные методов могут конкурировать с имеющимися альтернативными (в том числе оптимизационными) методами, причем не только по робастности и эффективности, но и плане качества получаемых приближенных решений с точки зрения исходной задачи оптимизации (1).

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 24-21-00015).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Luo Z.-Q., Pang J.-S., Ralph D.. *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [2] Fischer A., Izmailov A.F., Solodov M.V. The Levenberg–Marquardt method: an overview of modern convergence theories and more // *Computational Optimization and Applications*. 2024. <https://doi.org/10.1007/s10589-024-00589-1>
- [3] Fischer A., Herrich M., Izmailov A.F., Solodov M.V. A globally convergent LP-Newton method // *SIAM Journal on Optimization*. 2016. V. 26. P. 2012–2033.

## **АДАПТИВНЫЙ НЕМОНОТОННЫЙ ОБУЧАЮЩИЙ АЛГОРИТМ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВЕСА НЕЙРОННОЙ СЕТИ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ КРЕДИТНОГО РИСКА**

**Куренной Дмитрий Святославович, Жуков Александр Сергеевич**

Кафедра исследования операций, e-mail: d.kurennoy@yandex.ru, alexander.zh.2002@gmail.com

Тема кредитного риска является одной из самых обсуждаемых в области банковского дела, а задача оценки кредитного риска – одной из самых приоритетных и сложных. На данный момент наиболее распространенной практикой является использование классических регрессионных моделей. Однако качество этих моделей не всегда является удовлетворительным, особенно с учетом возрастающих регуляторных требований. Увеличение количества статистических данных позволяет в качестве альтернативы исследовать более продвинутые инструменты решения данной задачи, в частности, модели, построенные на основе архитектуры нейронных сетей.

Важнейшим этапом при создании таких моделей является подбор весов. Эту задачу выполняет обучающий алгоритм. Традиционно используемые алгоритмы градиентного спуска имеют несколько общих проблем [1]. Одна из них заключается в возможности чрезмерного роста весов сети – это приводит к неполному использованию моделью информации и, как следствие, к ухудшению дискриминационной способности. Кроме того, это может приводить к нарушению экономической логики, закладываемой в модель. Другая проблема – монотонность большинства методов: алгоритм не способен намеренно сделать шаг, не являющийся оптимальным на данный момент, но приводящий к лучшему конечному результату.

В рамках данной работы исследовано применение альтернативного подхода к обучению нейронных сетей для создания модели оценки кредитного риска – адаптивного немонотонного метода с ограничением весов нейронной сети. Такой подход способен решать сразу обе указанные проблемы. Основной идеей данного алгоритма является накладывание ограничений на веса нейронной сети. Помимо решения проблемы больших или противоречащих экономической логике весов это позволяет рассматривать задачу подбора весов как задачу условной оптимизации и применять соответствующие методы.

Алгоритм включает две основные фазы: адаптивный немонотонный метод проекции градиента и метод сопряжённых градиентов. Первая фаза представляет собой метод условной оптимизации и предназначена для выхода на гипергрань множества ограничений, в рамках которой будет применяться вторая фаза [2]. Вторая фаза представляет собой метод безусловной оптимизации, который действует внутри пространства меньшей размерности и, за счёт этого,

имеет большую скорость обучения [3]. Проведенные эксперименты подтверждают преимущества рассмотренного метода по сравнению с традиционными.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ioannis E. Livieris, Panagiotis Pintelas An adaptive nonmonotone active set – weight constrained – neural network training algorithm Neurocomputing 360 (2019) 294-303
- [2] William W. Hager, Hongchao Zhang A new conjugate gradient method with guaranteed descent and an efficient line search SIAM J. OPTIM. Vol. 16, No. 1, pp.170-192
- [3] Hongchao Zhang, William W. Hager A nonmonotone line search technique and its application to unconstrained optimization SIAM J. OPTIM. Vol. 14, No. 4, pp.1043-1056
- [4] Peter Martey Addo, Dominique Guegan, Bertrand Hassani Credit Risk Analysis Using Machine and Deep Learning Models // University Ca' Foscari of Venice, Dept. of Economics Research Paper Series No. 08/WP/2018.

## О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ СЕМЕЙСТВА ПОДМНОЖЕСТВ

**Морозов Владимир Викторович, Романов Сарыал Иннокентьевич, Хуан Чжанжуньлун**

Кафедра исследования операций, e-mail: morosov@mail.ru, kynuola@mail.ru,  
a842739213@gmail.com

Пусть  $N = \{1, \dots, n\}$  – конечное множество, а  $\mathcal{F} = \{S_i, i = 1, \dots, m\}$  – семейство его подмножеств. Множество  $S \subset N$  называется системой представителей для  $\mathcal{F}$ , если  $S \cap S_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, m$ . Задача построения минимальной (по мощности) системы представителей (МСП) имеет много приложений [1].

Для вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  и множества  $S \subseteq N$  положим  $x(S) = \sum_{j \in S} x_j$ . МСП можно найти, решая для пары  $(N, \mathcal{F})$  задачу булева программирования: найти  $M^* = \min x(N)$  при ограничениях  $x(S_i) \geq 1, i = 1, \dots, m, x_j = 0, 1, j \in N$ . Рассмотрим соответствующую задачу линейного программирования (ЗЛП): найти  $M = \min x(N)$  при ограничениях  $x(S_i) \geq 1, i = 1, \dots, m, x_j \geq 0, j \in N$ . Упорядочим компоненты ее оптимального решения  $x^0 : x_{j_1}^0 \leq \dots \leq x_{j_n}^0$ . Определим  $h = \max\{k \mid x_{j_1}^0 + \dots + x_{j_k}^0 < 1\}, T = N \setminus \{j_1, \dots, j_h\}, |T| = t$ .

**Утверждение 1.** *Справедливы неравенства  $\lceil M \rceil \leq M^* \leq t$ . Множество  $T$  – система представителей для  $\mathcal{F}$ , а если  $\lceil M \rceil = t$ , то  $T$  – МСП для  $\mathcal{F}$ .*



В докладе будут приведены примеры использования утверждения 1 в алгоритмах построения одной или всех МСП. Рассмотрим, например, модификацию жадного алгоритма [1]. Он состоит в построении системы представителей за несколько шагов. На первом шаге выбирается элемент  $k_1 \in N_1 = N$ , входящий в наибольшее число множеств семейства  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$ . Затем элемент  $k_1$  удаляется из  $N_1$ , а из  $\mathcal{F}_1$  удаляются все множества, которым  $k_1$  принадлежит. Возникают множество  $N_2$  и семейство  $\mathcal{F}_2$ , для которых выбирается элемент  $k_2$  аналогично выбору  $k_1$  на первом шаге и т. д. В результате будет построена система представителей  $K$ . Во многих случаях она не МСП, даже если просматривать все варианты выбора элементов  $k_s$ . Более того, построенная система представителей  $K$  может не содержать ни одной МСП. В модифицированном жадном алгоритме перед выбором  $k_s$  решается ЗЛП для пары  $(N_s, \mathcal{F}_s)$ . По утверждению 1 на шаге  $s$  возможно построение МСП  $T_s$  для семейства  $\mathcal{F}_s$ . Тогда  $\{k_1, \dots, k_{s-1}\} \cup T_s$  — система представителей для  $\mathcal{F}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Райгородский А. М. Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М. : МЦНМО, 2009. 131 с.

## **БАЛАНСИРОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ ДАННЫХ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ**

**Алексеев Григорий Сергеевич, Смелянский Руслан Леонидович, Степанов Евгений Павлович**

Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: [aleksagri07@gmail.com](mailto:aleksagri07@gmail.com),  
[smel@cs.msu.ru](mailto:smel@cs.msu.ru), [estepanov@asvk.cs.msu.ru](mailto:estepanov@asvk.cs.msu.ru)

В докладе рассматривается проблема обеспечения качества сервиса передачи нестационарного потока данных по набору из наложенных каналов, идущих к одному и тому же получателю. Под наложенным каналом понимается канал передачи данных, состоящий из линий разной физической природы: кабельных, оптических, и радиоканалов. Под качеством сервиса понимается набор следующих характеристик: пропускная способность, задержка, вероятность потери пакета, и вариация задержки. Необходимо распределить поток между каналами так, чтобы требования к качеству сервиса соблюдались.

Под нестационарным потоком будем понимать последовательность пакетов, временные интервалы между которыми - переменная величина. Будем называть сегментом потока последовательность пакетов этого потока, временные интервалы между которыми не превышают некоторый порог. В докладе рассматривается подход, основанный на балансировке сегментов потока. Ранее были разработаны методы балансировки [1, 2, 3, 4], использовавшиеся как методы балансировки флулетов - сегментов потока, возникающих внутри

сети, на маршрутизаторах. Ни один из таких методов не учитывает показатели качества сервиса.

Для решения рассматриваемой задачи было предложено представить её в виде задачи распределения ресурсов, и взять за основу метод FLARE [1], который обнаруживает сегменты потока согласно заданному показателю нестационарности (минимальному интервалу между сегментами) и распределяет трафик согласно заданному вектору распределения. Важной подзадачей является задача оптимального выбора интервала между сегментами [5] для конкретного приложения и транспортного протокола. Его выбор существенно влияет на показатели качества сервиса.

В докладе представлены результаты исследования зависимости показателей предоставляемого качества сервиса от показателя нестационарности и от вектора распределения нагрузки, а также зависимости значения показателя нестационарности от приложения и транспортного протокола. Показаны предварительные результаты предложенного метода балансировки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sinha S., Kandula S., Katabi D. Harnessing TCP's Burstiness with Flowlet Switching // Proceedings of the 3rd ACM Workshop on Hot Topics in Networks (Hotnets-III). Citeseer, 2004
- [2] CONGA: Distributed Congestion-Aware Load Balancing for Datacenters / Alizadeh M., Edsall T., Dharmapurikar S., Vaidyanathan R., Chu K., Fingerhut A., Lam V. T., Matus F., Pan R., Yadav N., Varghese G. // Proceedings of the 2014 ACM conference on SIGCOMM. ACM, 2014. pp. 503–514.
- [3] HULA: Scalable Load Balancing Using Programmable Data Planes / Katta N., Hira M., Kim C., Sivaraman A., Rexford J. // Proceedings of the Symposium on SDN Research. ACM, 2016. pp. 1–12.
- [4] Let it Flow: Resilient Asymmetric Load Balancing with Flowlet Switching / Vanini E., Pan R., Alizadeh M., Taheri P., Edsall T. // Proceedings of the 14th USENIX Symposium on Networked Systems Design and Implementation. NSDI, 2017. pp. 407–420.
- [5] Benet C. H., Kassler A. J. FlowDyn: Towards a Dynamic Flowlet Gap Detection using Programmable Data Planes // 2019 IEEE 8th International Conference on Cloud Networking (CloudNet). IEEE, 2019.

## **АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО МНОГОПРОЦЕССОРНОГО РАСПИСАНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

**Балашов Василий Викторович, Мальчевский Степан Алексеевич**

Кафедра АСБК, e-mail: hbd@cs.msu.ru, MalchevskiySA@my.msu.ru

При выполнении вычислений необходимо соблюдать баланс между скоростью получения результата и затратами энергии на его получение. Выполнение вычислений с минимизацией энергопотребления актуально как для автономных систем с ограниченной доступностью энергии, так и для центров обработки данных, в которых минимизация потребления энергии важна с экономической точки зрения.

Два наиболее часто используемых программных механизма энергосбережения – динамическое изменение напряжения и частоты работы процессора (DVFS – Dynamic Voltage & Frequency Scaling) и энергосберегающие состояния процессора (DPM – Dynamic Power Management). Использование DVFS позволяет выполнять одни и те же вычисления либо быстрее и с большими затратами энергии, либо медленнее и с меньшими затратами. DPM даёт возможность перевести простаивающий процессор в режимы пониженного энергопотребления, ждущий и спящий, отличающиеся энергозатратами и временами входа и выхода из этих режимов.

Для многопроцессорных систем большую роль в минимизации энергопотребления также играет механизм миграции задач между процессорами. Сам процесс миграции требует дополнительных затрат времени и энергии, однако перенос задач позволяет перевести освободившиеся процессоры в спящий или ждущий режимы. Для систем с неоднородными процессорами миграция задач на более энергоэффективные процессоры также может снизить затраты энергии при исполнении задач.

В докладе выполнен обзор постановок и алгоритмов решения задачи построения расписания вычислений с минимизацией энергопотребления. Основными критериями обзора являются: структура рабочей нагрузки, поддержка миграции задач и используемые механизмы энергосбережения.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] J.-J. Chen, H.-R. Hsu, K.-H. Chuang, C.-L. Yang, A.-C. Pang, T.-W. Kuo. Multiprocessor Energy-Efficient Scheduling with Task Migration Considerations // 12th 16th Euromicro Conference on Real-Time Systems. – 2004. – P.101-108.
- [2] U. U. Tariq, H. Wu. Energy-Aware Scheduling of Conditional Task Graphs with Deadlines on MPSoCs // IEEE 34th International Conference on Computer Design. – 2016. – P.265-272.

- [3] Д. А. Грушин, Н. Н. Кузюрин. Энергоэффективные вычисления для группы кластеров // Труды Института системного программирования РАН. – 2012. – Т. 23. – С.433-446.
- [4] J. L. Berral, I. Goiri, R. Nou, F. Julià. Towards energy-aware scheduling in data centers using machine learning // 1st International Conference on Energy-Efficient Computing and Networking. – 2010. – P.215-224.

## **МЕТОДИКА ТЕСТИРОВАНИЯ СЕТЕВОГО ПРОЦЕССОРНОГО УСТРОЙСТВА**

**Волканов Дмитрий Юрьевич<sup>1</sup>, Рябченков Владимир Михайлович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: volkanov@asvk.cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: vult150@asvk.cs.msu.ru

Сетевое процессорное устройство (СПУ) — это программируемый процессор, архитектура которого оптимизирована для работы в сетевых устройствах и обеспечения устойчивого режима обработки пакетов [1]. Основные задачи СПУ — это выделение заголовков пакетов, классификация их согласно таблицам классификации и модификация заголовков. Для решения этих задач обычно используется конвейерная архитектура сетевого процессора [2].

В данной работе рассматривается следующая задача. Дан СПУ, для которого сформулированы требования в виде списка поддерживаемых RFC. Требуется разработать методику тестирования такого устройства.

Предлагаемая в работе методика включает в себя следующие шаги:

1. Для каждой функциональности, заявленной в требованиях, выписан RFC/Стандарт, в котором описана данная функциональность и представлены требования к её реализации.
2. Из каждого представленного RFC/Стандарта выписан набор требований к реализации данной функциональности.
3. Для каждого требования подготовлен набор тестов (их названий). Для каждого теста приведена ссылка на конкретное требование из RFC/Стандарта.
4. Для каждого теста из набора подготовлено подробное описание теста, которое состоит из:
  - Краткое словесное описание теста;
  - Описание начальной конфигурации устройства для данного теста;
  - Описание входных данных: описание трафика который генератор трафика генерирует на заданные порты устройства; длительность выполнения теста;
  - Описание ожидаемого результата: ожидаемый трафик, который должен быть получен генератором трафика от устройства на заданные порты; ожидаемая конфигурация устройства;

— Описание критерия успешности прохождения теста.

5. Для каждого теста подготовлены все файлы, необходимые для проведения тестирования.
6. Для каждого теста проведено его выполнение (запуск) на тестируемом устройстве.
7. Для каждого выполненного теста описан результат его выполнения: тест пройден; не пройден (причина ошибки); отчет о прохождении теста.
8. Пункты 1-3 реализованы в одной таблице, а описание тестов (пункт 4) в другой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Orphanoudakis T., Perissakis S. Embedded Multi-Core Processing for Networking //Multi-Core Embedded Systems - 2010. - CRC Press - p. 399-463.
- [2] Беззубцев С.О., Васин В.В., Волканов Д.Ю., Жайлауова Ш.Р., Мирошник В.А., Скобцова Ю.А., Смелянский Р.Л. Об одном подходе к построению сетевого процессорного устройства //Моделирование и анализ информационных систем. – 2019. – Т. 26. – №. 1. – с. 39-62.

## **МЕТОД ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-ВЕКТОРНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КАЧЕСТВА КАНАЛА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ**

**Го Фэнжуй<sup>1</sup>, Королев Виктор Юрьевич<sup>2</sup>, Смелянский Руслан Леонидович<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: gfengrui@yandex.ru

<sup>2</sup> Кафедра математической статистики, e-mail: bruce27@yandex.ru

<sup>3</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: smel@cs.msu.su

**Введение** Прогнозирование качества канала передачи данных является критически важной задачей в современных телекоммуникационных системах [1, 2]. Традиционные методы авторегрессии (AR) и векторной авторегрессии (VAR) обладают ограниченной адаптивностью к нестационарным временным рядам [3]. В работе предложен метод экспоненциально-векторной авторегрессии (EVAR), сочетающий модифицированное взвешивание признаков с многомерным прогнозированием.

**Постановка задачи** Цель исследования — разработка метода прогнозирования сетевых параметров (пропускная способность, задержка, потери пакетов) на основе временных рядов  $X(t)$ , обогащённых статистическими признаками. Ключевые требования: 1. Устранение запаздывания оценок квантилей при скользящем анализе. 2. Адаптация к локальным тенденциям данных через взвешенное усреднение. 3. Интеграция расширенного признакового пространства в модель VAR.

**Метод EVAR** Метод включает три этапа: 1. *Экспоненциальное взвешивание* для вычисления модифицированных квантилей:

$$w_j = \frac{(1-p)(1-p^j)}{n-p(n+1-p^n)}, \quad p \in [0, 1),$$

где  $p$  — коэффициент затухания,  $n$  — размер окна. 2. *Формирование признакового пространства*:

— Для окна  $W_n = \{X_{t-n+1}, \dots, X_t\}$  вычисляются 11 квантилей (5%, 15%, ..., 95%).

— Признаки объединяются с исходными данными в вектор  $V_t = (W_n, X_t)$ .

3. *Прогнозирование* через VAR-модель:

$$V_{t+1} = \sum_{i=1}^p \Phi_i V_{t-i+1} + \epsilon_t,$$

где  $\Phi_i$  — матрицы коэффициентов,  $p$  — порядок авторегрессии.

**Результаты** Предложенный метод устраняет запаздывание оценок квантилей, характерное для классических подходов. Анализ влияния параметров показал доминирующую роль размера окна  $W$  по сравнению с коэффициентом затухания  $p$  и порядком авторегрессии.

**Заключение** EVAR демонстрирует повышенную устойчивость к волатильности данных за счёт адаптивного учёта локальных тенденций. Метод применим для прогнозирования сетевых параметров в режиме реального времени. Эксперименты подтвердили снижение погрешности на 4,12–25,22% относительно классических AR/VAR.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Львовский С. М. Набор и верстка в системе Л<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. М. : МЦНИО, 2006.
- [2] Schirru A. et al. Learning from time series // IEEE Conf. on Decision and Control. 2012.
- [3] Dai T. et al. Periodicity decoupling framework // ICLR. 2024.

# ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОЛОГИЙ ВЫБОРА ПОДХОДА К ОРГАНИЗАЦИИ АРХИТЕКТУРЫ МИКРОСЕРВИСНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ В ОБЛАЧНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДАХ

**Любимов Артем Максимович, Антоненко Виталий Александрович**

Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: artem.lyubimov2608@gmail.com, anvial@asvk.cs.msu.ru

Современные программные приложения всё чаще разрабатываются на основе микросервисной архитектуры, что позволяет повысить гибкость, масштаби-

руемость и отказоустойчивость систем. Среди наиболее популярных подходов выделяются Оркестрация и Хореография, каждый из которых предлагает разные способы управления взаимодействием между сервисами. Однако выбор конкретного подхода к организации взаимодействия между компонентами остаётся сложной задачей, так как различные архитектурные решения имеют свои преимущества и ограничения [1, 2].

В ходе выполнения работы решена задача разработки методологии выбора подхода к организации взаимодействия микросервисов, позволяющей на основе характеристик приложения и его требований принимать обоснованное решение в пользу оркестрации или хореографии. Методология должна учитывать ключевые метрики, такие как масштабируемость, отказоустойчивость, предсказуемость времени отклика и сложность проектирования [1, 3]. Также она должна быть применима к широкому классу приложений, развёрнутых в облачных вычислительных средах.

Для проверки эффективности предложенной методологии было проведено экспериментальное исследование, в рамках которого тестировалось программное приложение, реализованное с использованием различных подходов к организации микросервисной архитектуры. Оценивались ключевые показатели производительности и гибкости системы в зависимости от выбранной архитектурной стратегии. Результаты экспериментов позволили сформулировать практические рекомендации по выбору оптимального способа организации микросервисного взаимодействия в зависимости от характеристик конкретного приложения [2, 3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. A. Megargel, C. M. Poskitt, and V. Shankaraman, “Microservices Orchestration vs. Choreography: A Decision Framework,” in Proceedings of the 25th IEEE International Enterprise Distributed Object Computing Conference (EDOC 2021), Gold Coast, Australia, Oct. 2021, pp. 134-141.
- [2] S. Giallorenzo, J. Mauro, A. Melis, F. Montesi, M. Peressotti, and M. Prandini, “Choreography-Defined Networks: A Case Study on DoS Mitigation,” Proceedings of the 2024 International Conference on Service-Oriented Computing (ICSOC), 2024.
- [3] C. Peltz “Web services orchestration and choreography,” in Computer, vol. 36, no. 10, pp. 46-52, Oct. 2003, doi: 10.1109/MC.2003.1236471.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БЛОКЧЕЙН ДЛЯ ХРАНЕНИЯ СЕКРЕТОВ В MESH VPN

Милешин Артем Дмитриевич, Ильин Илья Константинович, Писковский Виктор Олегович

Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: mileshin.a.d@lvk.cs.msu.ru, ilin.i.k@asvk.cs.msu.ru, vpiskovskii@asvk.cs.msu.ru

В данной работе будет исследована возможность использования DLT для хранения секретов в Mesh-VPN. Для этого будет реализована система хранения пары ключей (ephemeral и serial)

**Введение** Современные Mesh-сети на базе WireGuard сталкиваются с проблемой безопасного и масштабируемого управления ключами в условиях децентрализованной архитектуры. В качестве решения предлагается интеграция WireGuard с распределённым реестром на базе Cosmos SDK, где DLT обеспечивает децентрализованное хранение ключей и криптографически верифицируемый аудит операций.

**Архитектура системы** В рамках проекта реализовано блокчейн-приложение, построенное на фреймворке Cosmos SDK, который предоставляет модульную структуру для создания специализированных блокчейнов. Для обеспечения консенсуса между узлами используется алгоритм Tendermint BFT (Byzantine Fault-Tolerant), гарантирующий согласованность данных даже при наличии до 1/3 византийских узлов. Основная задача системы — безопасное хранение и управление парой приватных ключей протокола WireGuard: ephemeral private initiator key (временный ключ сессии) и static private initiator key (постоянный ключ инициатора). Каждый ключ имеет фиксированный размер 32 байта, что позволяет упаковать их в единую транзакцию размером 64 байта. Для оптимизации хранения ключи кодируются в формате Base64 и записываются в блокчейн как структурированные данные с меткой времени и идентификатором узла-инициатора.

Для тестирования системы развернут распределенный стенд из 13 узлов, имитирующий реальную Mesh-сеть. Число узлов выбрано исходя из требований алгоритма Tendermint, где для достижения консенсуса необходимо, чтобы более 2/3 участников (в данном случае 9 из 13) оставались корректными.

Для WireGuard разработана программа-обертка на языке Go, которая заменяет традиционное хранение ключей в файлах wg0.conf на взаимодействие с блокчейн-сетью. Замеры показали, что задержка на запись ключей в блокчейн составляет в среднем 1.2 секунды (время финализации блока Tendermint), что приемлемо для большинства сценариев Mesh-VPN.

**Заключение** Разработанная система хранения эфемерных и статических публичных ключей инициатора для WireGuard в распределенном реестре на базе Cosmos SDK и Tendermint демонстрирует новый уровень безопасности и



децентрализации в управлении VPN-инфраструктурой. Интеграция криптографических примитивов WireGuard с блокчейн-механизмами позволила устранить ключевые недостатки централизованных решений: риски единых точек отказа, утечек ключей и отсутствие прозрачности аудита. Использование консенсуса BFT (Tendermint) для валидации операций обеспечивает устойчивость системы к атакам и компрометации узлов, сохраняя при этом высокую доступность данных.

Перспективным направлением исследований является внедрение zero-knowledge proof для дополнительной защиты метаданных, а также создание гибридных моделей, где критически важные операции выполняются off-chain.

Авторы выражают благодарность профессору Писковскому В. О. за постановку задачи. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кейсон Д., Финн Э., Милошевич Н., Милошевич З., Бучман Э., Педоне Ф. The Design, Architecture and Performance of the Tendermint Blockchain Network // 2021 // 40th International Symposium on Reliable Distributed Systems (SRDS): материалы симпозиума. Чикаго, США, 2021. С. 23–33. URL: <https://doi.org/10.1109/SRDS53918.2021.00012>
- [2] Доненфельд Дж. А. WireGuard: Next Generation Kernel Network Tunnel [Электронный ресурс] // 2020 // URL: <https://www.wireguard.com/papers/wireguard.pdf> (дата обращения: 10.02.2025).

## **ФОРМИРОВАНИЕ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОГО ОБРАЗА ВИРТУАЛЬНОЙ МАШИНЫ ДЛЯ КУРСА «ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СЕТЕВЫХ ПРОТОКОЛОВ В LINUX»**

**Осипчук Артём Андреевич<sup>1</sup>, Капитонова Алла Петровна<sup>2</sup>, Курячий  
Георгий Владимирович<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, Лаборатория свободного ПО, e-mail: [s02220200@gse.cs.msu.ru](mailto:s02220200@gse.cs.msu.ru)

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: [alla@asvk.cs.msu.ru](mailto:alla@asvk.cs.msu.ru)

<sup>3</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, Лаборатория свободного ПО, e-mail: [george@cs.msu.ru](mailto:george@cs.msu.ru)

В рамках образовательного процесса часто возникает потребность в среде, которая будет содержать все требующиеся для курса программные инструменты и ограничения. На факультете ВМК эту проблему решает сборка дистрибутивов ОС отдельно под каждый курс или практикум. Также существует необходимость регулярной конфигурации дистрибутивов под меняющиеся потребности. Ручная конфигурация стандартных дистрибутивов является неэффективным решением. В работе будет предложен способ автоматизации этого процесса.

Рассматривается задача сборки образов операционной системы на базе ОС Альт и их настройки на этапе создания. Для решения этой задачи был использован инструмент `mkimage-profiles` [1]. Он позволяет быстро повторно создавать дистрибутив на базе ОС Альт с актуальными версиями пакетов и гибко менять их список, добавлять и настраивать новые утилиты, а также вставлять старые файлы настроек и сценариев, выполняющихся на стадии создания образа дистрибутива. В качестве практического результата изучения инструмента, реализована сборка специализированного образа виртуальной машины для курса «Практические аспекты сетевых протоколов в Linux».

Для сборки дистрибутива нам требуется его профиль. Профиль составляется для утилиты GNU Make [2], которая автоматизирует процесс преобразования исходного кода в объектные файлы и их последующую компоновку в исполняемые файлы или библиотеки. В нашем случае «цели» Make — это компоненты профиля ОС и стадии его создания. Для базовых дистрибутивов профили уже существуют и требуют лишь запустить сборку, указав название цели и расширение образа. Далее `mkimage-profiles` открывает глобальный сценарий и добавляет в него вставками весь код, затребованный профилем. После этого выполняются несколько этапов создания образа, которые в `mkimage-profiles` называют субпрофили. Для каждого сценария можно указать принадлежность субпрофилю. Некоторые цели создают цепочки сценариев. В них мы можем описать фрагменты описания конфигурации для автоматического включения в глобальный сценарий. Также можно добавить подкаталоги с файлами, содержимое которых добавляется к содержимому включённых в дистрибутив субпрофилей и подкаталоги со сценариями, которые исполняются во время сборки.

Задачей выполненной работы было перенести в систему сборки старый образ, где настройки вносились вручную на протяжении многих лет преподавания. Был выбран базовый образ для виртуальной машины ОС JeOS (Just Enough Operating System), на основе которого строился старый образ. Сборки JeOS, не являясь полноценными дистрибутивами, содержат лишь минимальный набор компонентов, достаточный для установки работоспособной ОС. В образ были добавлены подключение по последовательному порту, включение и выключение автозапуска необходимых сервисов, создание логина и пароля для суперпользователя, подключение списка пакетов и отдельных наименований. Каждая из подключённых целей была исследована для исключения лишних вызовов для минимизации веса образа. Также была создана специальная цель, отвечающая за настройки GRUB (загрузчик операционной системы от проекта GNU) и перенос из старого образа файлов, сценариев суперпользователя и настроек приложений.

В результате работы образ виртуальной машины был перенесён в систему сборки и опробован в ходе лекций на курсе «Практические аспекты сетевых

протоколов в Linux». Это даёт возможность, дописав всего несколько строчек кода, выпускать обновления образа по первому требованию лектора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] <https://www.altlinux.org/Mkimage-profiles>
- [2] <https://www.gnu.org/software/make/manual/make.pdf>

## БАЛАНСИРОВКА СТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ ДАННЫХ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ

Сеченых Иван Ильич, Смелянский Руслан Леонидович

Кафедра Автоматизации Систем Вычислительных Комплексов, e-mail: sechenykh.ivan@gmail.com, sme1@cs.msu.ru

В работе [1] поставлена проблема балансировки потока данных между наложенными каналами, удовлетворяющими требованиям качества и ведущими к одному и тому же получателю. В докладе эта проблема рассматривается для случая стационарного потока данных.

Будем считать, что SLA определяет требование к качеству сервиса по передаче данных — скорость, задержку, джиттер и допустимую вероятность потери пакета. QoS канала задает значения этих характеристик, которые может обеспечить этот канал.

В этой работе мы рассматриваем ситуацию, когда между двумя точками проложено несколько параллельных гетерогенных каналов. Гетерогенный канал — это канал, который состоит из сегментов физических линий разной природы: оптических, коаксиальных, беспроводных и т.п.

**Постановка задачи.** Пусть был выбран канал, QoS которого удовлетворяет требованиям SLA стационарного потока данных. Пусть в некоторый известный момент времени QoS этого канала перестал удовлетворять SLA потока. Надо разработать метод разделения исходного потока данных на два или более подпотоков между несколькими наложенными каналами так, чтобы суммарное качество обслуживания исходного потока удовлетворяло SLA (задача балансировки потока).

В работе предложена аналитическая модель для анализа стационарных динамических потоков данных в гетерогенных сетях, на основе которой разработан алгоритм балансировки трафика. Алгоритм динамически распределяет нагрузку между каналами, учитывая требования QoS. Для оценки эффективности проведены эксперименты и собраны данные работы алгоритма для потоков с разными требованиями QoS.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Член-корреспондент РАН Р. Л. Смелянский, Е. П. Степанов (2024). ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 516, с. 103–112 ПРИМЕНЕНИЕ

**МЕТОДОВ С МАШИНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ СЕТЕВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ИНФРАСТРУКТУРОЙ**

- [2] Besenczi, R., Bátfai, N., Jeszenszky, P., Major, R., Monori, F., & Ispány, M. (2020). Large-scale Analysis and Simulation of Traffic Flow using Markov Models. arXiv.
- [3] Степанов С. Н. Теория телетрафика: концепции, модели, приложения. – М.: Горя-чая линия – Телеком, 2015. – 868 с: ил. – (Серия «Теория и практика инфокоммуникаций»)

**РАЗРАБОТКА ПОДСИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ПРОЦЕДУРАМИ РЕКОНФИГУРАЦИИ В ПРОГРАММНО-КОНФИГУРИРУЕМЫХ СЕТЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОГО РЕЕСТРА**

**Шпигун Игорь Кириллович<sup>1</sup>, Писковский Виктор Олегович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: Igor.ig0207@mail.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: vpiskovski@lvk.cs.msu.ru

В последние годы технологии Программно-Конфигурируемых Сетей (ПКС) активно развивается, и решение проблемы восстановления сетевой инфраструктуры становится все более актуальной [1]. ПКС предлагают уникальную гибкость в управлении сетевыми ресурсами, однако динамическая реконфигурация устройств может привести к возникновению аномалий и несогласованностей [2]. Это, в свою очередь, может привести к состоянию, когда сеть перестает функционировать корректно.

В данной работе проводится анализ существующих методов восстановления сетей [3], а также предлагается новый подход, основанный на использовании блокчейн-технологий в качестве журнала транзакций. Этот метод позволяет обеспечить надежность и прозрачность процессов восстановления. Особое внимание уделяется понятию корректного состояния сети, которое служит основой для принятия решений относительно выполнения процедур реконфигурации. В результате, предлагаемый подход не только повышает устойчивость сети к сбоям, но и способствует более эффективному управлению сетевыми ресурсами в условиях постоянных изменений.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Грушо А. А., Терёхина И.Ю. Анализ непротиворечивости реконфигурации программно-конфигурируемой сети // Системы и средства информ. 2017. Т. 27. № 3. С. 12–22.
- [2] Шпигун И. К., Писковский В.О. Исследование слабосогласованных процедур реконфигурации ПКС при выполнении конкурирующих запросов построения маршрутов

- [3] Yinbo Yu , Xing Li, Xue Leng, Libin Song, Kai Bu, Yan Chen, Jianfeng Yang, Liang Zhang, Kang Cheng, Xin Xiao. Fault Management in Software-Defined Networking: A Survey

## **О ПОВЫШЕНИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШАННЫХ КОМПОНЕНТ СВЯЗНОСТИ И МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ**

**Горшенин Андрей Константинович, Виляев Антон Львович**

ФИЦ ИУ РАН, e-mail: AGorshenin@frccsc.ru, avilyaev720@gmail.com

На практике часто приходится иметь дело с неполными данными, подверженными влиянию разнообразных случайных факторов. Для корректного описания закономерностей для таких данных в математическом моделировании традиционно используют аппарат теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов. В данной работе предложено расширение ранее предложенной в исследованиях авторского коллектива ансамблевой нейросетевой архитектуры [1] для повышения точности прогнозирования временных рядов за счет изменения классической функции потерь. В докладе рассмотрена ее модификация, с дополнительным слагаемым на основе ядерных оценок плотности [2]. Предложенный подход апробирован на открытых наборах океанологических данных, а также на датасете характеристик электрических трансформаторов ETDataset [3]. В качестве базовых архитектур использовались рекуррентные архитектуры LSTM, случайные леса, а также гибридные архитектуры, состоящие из LSTM и трансформера. Архитектура с модифицированной функцией потерь продемонстрировала результаты, во всех случаях превосходящие ранее полученные для классической функции потерь. Так, прирост точности прогнозирования потоков тепла на океанологических данных по метрике RMSE относительно базовых архитектур составил до 15.7% для океанологических данных и до 12.6% на датасете характеристик трансформаторов по метрике MSE. Лучшая точность для океанологических данных была получена с помощью архитектуры, основанной на LSTM и трансформере, и составила 0.056 в терминах метрики RMSE, а для электрического датасета лучшие результаты были показаны с помощью информированной архитектуры Random Forest (MSE = 0.162).

Для обучения нейронных сетей использована инфраструктура Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gorshenin, A.K.; Vilyaev, A.L. Machine Learning Models Informed by Connected Mixture Components for Short- and Medium-Term Time Series Forecasting. *AI* 2024, 5, 1955-1976. <https://doi.org/10.3390/ai5040097>
- [2] A. Gomez-Alanis; J. A. Gonzalez-Lopez and A. M. Peinado; "A Kernel Density Estimation Based Loss Function and its Application to ASV-Spoofing Detection," in *IEEE Access*, vol. 8, pp. 108530-108543, 2020, doi: 10.1109/ACCESS.2020.3000641
- [3] Zhou, H.; Zhang, S.; Peng, J.; Zhang, S.; Li, J.; Xiong, H.; Zhang, W. Informer: Beyond Efficient Transformer for Long Sequence 594 Time-Series Forecasting. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2021, Vol. 35, pp. 11106–11115. 595 <https://doi.org/10.1609/aaai.v35i12.17325>.

## **О КОМПОЗИЦИИ ГРАФОВО-СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И КВАДРОДЕРЕВЬЕВ В ЗАДАЧЕ СЕГМЕНТАЦИИ КОРАБЛЕЙ НА РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ**

**Горшенин Андрей Константинович, Достовалова Анастасия Михайловна**

ФИЦ ИУ РАН, e-mail: AGorshenin@frccsc.ru, ADostovalova@frccsc.ru

Существенный дисбаланс разделяемых классов является значимым препятствием для применения методов глубокого обучения в задаче выделения на спутниковых изображениях малоразмерных объектов. В данной работе предложено расширение ранее предложенной в исследованиях авторского коллектива ансамблевой нейросетевой архитектуры [1] для повышения точности сегментирования малых объектов, в том числе с целью реализации возможности обработки изображений высокого разрешения. Для оптимизации блока графовой свертки с вниманием с использованием графа квадродерева в новой предлагаемой архитектуре нейронной сети реализована процедура разбиения обрабатываемого изображения на суперпиксели [2], сохраняющая информацию о мелких деталях. Предложенный подход апробирован на открытых наборах радиолокационных снимков кораблей HRSID и SSDD [3,4]. В качестве базовых кодировщиков использовались сверточные нейросетевые модели DeepLabv3 и ENET. Графово-сверточная архитектура, информированная квадродеревом, продемонстрировала результаты, превосходящие традиционные, в том числе на основе графа связей между пикселями в виде двумерной решетки. Прирост точности сегментации кораблей по метрике  $F_1$  относительно таких графовых архитектур составил до 24.29% на наборе HRSID и 3.74% на наборе SSDD. В сравнении с базовыми сверточными кодировщиками средний прирост метрики  $F_1$  у ансамблевой архитектуры достигает до 15.07% на наборе HRSID и 56.48% на наборе SSDD.

Для обучения нейронных сетей использована инфраструктура Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Достовалова А. М. Нейросетевое квадродерево и его применение для сегментирования спутниковых изображений // Информатика и ее применения. 2024. Т. 18, № 4, с. 77–85.
- [2] Liu X., Li Y., Liu X., Zou H. Dark Spot Detection from SAR Images Based on Superpixel Deeper Graph Convolutional Network // Remote Sensing. 2022. Vol. 14, Iss. 21, Art. 5618.
- [3] Wei S., Zeng X., Qu Q., Wang M., Su H., Shi J. HRSID: A High-Resolution SAR Images Dataset for Ship Detection and Instance Segmentation // IEEE Access. 2020. Vol. 8, P. 120234–120254.
- [4] Zhang T., Zhang X., Li J., Xu X. et al. SAR Ship Detection Dataset (SSDD): Official Release and Comprehensive Data Analysis // Remote Sensing. 2021. Vol. 13, Iss. 18, Art. 3690.

## О ПОСТРОЕНИИ НЕЙРОСЕТЕЙ КОЛМОГорова-Арнольда НА ВЕРОЯТНОСТНОМ БАЗИСЕ

**Горшенин Андрей Константинович<sup>1</sup>, Жидкова Юлия Михайловна<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, e-mail: agorshenin@frccsc.ru

<sup>2</sup> ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, кафедра математической статистики, e-mail: zhidkova.ym@gmail.com

В работе предлагается модификация нейронных сетей Колмогорова-Арнольда (KAN), в которой традиционные слои заменяются на вероятностные модели, на основе конечных нормальных смесей. Такой подход позволяет сохранить ключевые свойства KAN, такие как универсальность аппроксимации и компактность представления, при этом добавляя вероятностную интерпретацию данных.

Теорема Колмогорова-Арнольда утверждает, что любая непрерывная  $n$ -мерная функция  $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$  может быть представлена в виде конечной композиции непрерывных одномерных функций и операции сложения:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \Phi_q \left( \sum_{p=1}^n \phi_{q,p}(x_p) \right),$$

где  $\phi_{q,p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\Phi_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — одномерные функции. Нейросетевая архитектура KAN [1] основана на этой теореме и заменяет линейные веса

традиционных многослойных перцептронов на одномерные функции, параметризованные сплайнами, которые обучаются на ребрах сети, а не на узлах.

В докладе предложена модификация архитектуры KAN, в которой каждый слой параметризуется как смесь нормальных распределений:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x \mid \mu_k, \sigma_k^2).$$

Гауссовские смеси обладают свойствами непрерывности и бесконечной дифференцируемости, что делает их подходящими под условия теоремы и пригодными для обучения методом обратного распространения ошибки.

Предложенная модификация трансформера с использованием слоя KAN с гауссовской смесью на датасете ETTh1 [3] (параметры электрического трансформатора – температура масла и различные варианты нагрузки, с 07.2016 по 07.2018 с почасовой частотой) в задаче предсказания 96 шагов временного ряда по предыдущим 96 значениям демонстрирует улучшенные результаты по сравнению с базовой сплайновой версией [2], достигая значений MSE 0.482 и MAE 0.530 против MSE 0.547 и MAE 0.689 у базовой модели.

Для обучения нейронных сетей использована инфраструктура Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Liu Z., Wang Y., Vaidya S., Ruehle F., Halverson J., Soljačić M., Hou T. Y., Tegmark M. KAN: Kolmogorov-Arnold Networks // arXiv preprint arXiv:2024.19756. 2024.
- [2] Han X., Zhang X., Wu Y., Zhang Z., Wu Z. KAN4TSF: Are KAN and KAN-based models Effective for Time Series Forecasting? // arXiv:2408.11306. 2024.
- [3] Zheng K., Wang J., Chen Y., Jiang R., Wang W. DDTCN: Decomposed dimension time-domain convolutional neural network along spatial dimensions for multiple long-term series forecasting // Applied Intelligence. 2024. Т.,54. С.,1–18. DOI: 10.1007/s10489-024-05526-7.

## ВЛИЯНИЕ ПРОПУСКА ДАННЫХ НА ТОЧНОСТЬ КРИТЕРИЯ БИОЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

**Захарова Татьяна Валерьевна, Клименко Виктор Кириллович**

Кафедра математической статистики, e-mail: tvzaharova@mail.ru, klimenkoprak@mail.ru

В данной работе рассматривается процедура проверки гипотезы биоэквивалентности лекарственных препаратов, с учетом возможности пропуска данных. Свойство биоэквивалентности является обязательным требованием для выхода на рынок нового лекарственного препарата (тестового), основанного на том



же активном веществе, что и уже существующий (референтный). Пропуски данных могут приводить к смещению в вычислении изучаемых фармакокинетических характеристик препаратов, что, в свою очередь, может привести к неправильному заключению о биоэквивалентности [1, 2].

В клиническом исследовании биоэквивалентности с каждым испытуемым связываются кривые концентрации вещества в крови после принятия тестового и референтного препаратов. Замеры происходят в predetermined моменты времени, после чего по ним происходит вычисление максимальной концентрации и площади под графиком кривой концентрации. При достаточном количестве замеров эти вычисления делают без предположений о функциональном виде кривой. Полученные таким образом значения в дальнейшем анализе считаются посчитанными точно.

В большинстве ситуаций это предположение безобидно, однако может оказаться неприемлемым, если в какие-то моменты времени измерение концентрации потеряно. В работе [3] рассматриваются четыре модели пропуска данных и их влияние на вероятность ошибки первого рода критерия проверки биоэквивалентности. Принципиально, что во всех четырех рассмотренных моделях пропуск наблюдения никак не связан с самим процессом изменения концентрации.

В нынешней работе исследуется влияние механизма пропуска данных, в котором вероятность пропуска наблюдения может зависеть от значений концентрации, на функцию мощности критерия проверки биоэквивалентности. Такая модель пропуска данных является более реалистичной и приводит к большему смещению в результатах. Следуя примеру работы [4], вероятность пропуска наблюдения моделируется логистической регрессией с наблюдаемыми и пропущенными значениями концентрации в качестве регрессоров.

Представлены результаты моделирования для различных параметров механизма пропуска данных. Проведено сравнение устойчивости различных методов вычисления площади под кривой концентрации к пропускам данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Assessing the bioequivalence of two different drugs with the same active ingredient / Dranitsyna M. A., Klimenko V. K., Panov P. V., Zakharova T. V. // BIOKYBERNETIKA: Mathematics for Theory and Control in the Human and in Society, edited by Jochen Mau, Sergey Mukhin, Guanyu Wang and Shuhua Xu, Berlin, Boston: De Gruyter, 2025, pp. 655-664.
- [2] Захарова Т. В., Тархов А. А. Оценка уровня значимости критерия Шуирманна для проверки гипотезы биоэквивалентности при наличии пропущенных данных // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, № 3. С. 58–62.

- [3] Allan Donner, Walter W. Hauck, Guangyong Zou. The impact of missing values in the concentration-time curve on the assessment of bioequivalence // *Pharmaceutical Statistics*. 4. 91 - 99. 10.1002/pst.156.
- [4] Gerd K. Rosenkranz Analysis of cross-over studies with missing data // *Statistical Methods in Medical Research*. 2015 Aug;24(4):420-33.

## **АНАЛИЗ РАСХОЖДЕНИЙ В РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕПАРАТОВ ПРИ ПРОВЕРКЕ БИОЭКВИВАЛЕНТНОСТИ**

**Захарова Татьяна Валерьевна<sup>1</sup>, Панов Павел Владиславович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра математической статистики, e-mail: tvzaharova@mail.ru

<sup>2</sup> Кафедра математической статистики, e-mail: mazinmind@yandex.ru

В данной работе рассматривается задача проверки лекарственных препаратов на биоэквивалентность. Исследования биоэквивалентности лежат в основе воспроизведения лекарственных препаратов, подтвердивших свою эффективность и безопасность. Основным методом проверки гипотезы биоэквивалентности является процедура двух односторонних тестов Шуирмана, которая используется на протяжении многих лет и доказала свою пригодность для подтверждения эквивалентной биодоступности.

Несмотря на широкое применение и достаточную надежность, современные методы исследования биоэквивалентности не используют значительную часть доступной информации в данных, что может приводить к ошибочным выводам относительно действенности и безопасности препарата. Например, в оригинальном критерии не учитывается форма кривой «концентрация—время», площадь под которой является одной из ключевых исследуемых величин. Также не принимаются во внимание свойства распределений рассматриваемых характеристик. Ранее авторами был предложен новый подход, позволяющий учитывать форму кривой.

В настоящее время продолжается исследование новых подходов к анализу биоэквивалентности, одним из которых является использование дивергенции Кульбака—Лейблера и ее модификаций в качестве меры различия между распределениями характеристик препаратов. Для части полученных в результате исследования статистик возможно построение процедуры двух односторонних тестов, причем их значения оказываются более чувствительными к различиям вблизи границ отвержения гипотезы о небиоэквивалентности. Важно отметить, что дивергенция Кульбака—Лейблера придает больший вес областям, где одно распределение имеет существенно меньшую вероятность, чем другое. В контексте биоэквивалентности это позволяет лучше обнаруживать малые, но значимые различия в концентрации препарата на поздних стадиях его действия, которые могут быть упущены стандартными методами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Panov P., Zakharova T. Procedure for comparing the pharmacokinetic characteristics of related drugs with same active substance // BIOKYBERNETIKA: Mathematics for Theory and Control in the Human and in Society. — Vol. 9 of De Gruyter Series in Mathematics and Life Sciences. — Berlin, New York, Germany: De Gruyter., 2024. — P. 50.
- [2] Драницына М. А. Захарова Т. В. Панов П. В. Проверка гипотез биоэквивалентности лекарственных препаратов // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2023. — № 4.
- [3] Захарова Т. В., Тархов А. А. Оценка уровня значимости критерия Шуирманна для проверки гипотезы биоэквивалентности при наличии пропущенных данных. // Информатика и ее применения, 2019 (3): 58-62.
- [4] Dragalin V, Fedorov V, Patterson S, Jones B. Kullback-Leibler divergence for evaluating bioequivalence. Stat Med. 2003 Mar 30;22(6):913-30. doi: 10.1002/sim.1451. PMID: 12627409.

## О ДИСПЕРСИОННО-СДВИГОВЫХ СМЕСЯХ НОРМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ КАК СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Королев Виктор Юрьевич, Романюк Никита Романович

Кафедра математической статистики факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: vkorolev@cs.msu, nikita200993@gmail.com

**Введение.** В данной статье показано, что произвольная дисперсионно-сдвиговая смесь нормальных законов:

$$F(x) = \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x - ay}{b\sqrt{y}}\right) dF_Z(y), \quad (1)$$

где  $Z$  - неотрицательная случайная величина, может быть стационарным распределением стохастического разностного уравнения – схемы авторегрессии первого порядка – со случайными коэффициентами:

$$Y_{n+1} = Y_n + \alpha_{n+1}(Y_n) + \beta_{n+1}(Y_n) \circ X_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

Приведен пример того, как должны выглядеть (случайные) коэффициенты дрейфа и диффузии для того, чтобы конкретная смесь была стационарным распределением. Показано, что стационарный режим процесса авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами обладает свойством устойчивости.

**Основной результат.** Следующие три теоремы демонстрируют при каких условиях дисперсионно-сдвиговая смесь нормальных законов (1) может быть стационарным распределением стохастического разностного уравнения (2).

**Теорема 1.** Для любой дисперсионно-сдвиговой смеси нормальных распределений (1) существует функция  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - a g(y)}{b \sqrt{g(y)}}\right) dF(y), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Теорема 2.** Пусть функция распределения  $F(x)$  имеет вид (1), в котором  $F_Z$  непрерывна и строго монотонна. Предположим, что в соотношении (2) коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  имеют вид

$$\alpha_n(u) = a F_Z^{-1}(F(u)) - u, \quad \beta_n(u) = b \sqrt{F_Z^{-1}(F(u))}, \quad u \in \mathbb{R},$$

Тогда функция распределения  $F(x)$  соответствует стационарному распределению последовательности (2).

Пусть верно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{|Y_n + \alpha_{n+1}(Y_n) - a g(Y_n)|}{b \sqrt{g(Y_n)}} \right] = 0, \quad (3)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \max \left\{ \frac{\beta_{n+1}(Y_n)}{b \sqrt{g(Y_n)}}, \frac{b \sqrt{g(Y_n)}}{\beta_{n+1}(Z_n)} \right\} - 1 \right] = 0, \quad (4)$$

тогда верна следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $Z$  — произвольная положительная случайная величина с функцией распределения  $F_Z(x)$ . Рассмотрим функцию распределения  $F$ , определяемую соотношением (1). Пусть  $g(u)$  — функция о которой идет речь в теореме (1). Пусть для каждого  $x \in \mathbb{R}$  существует предел:

$$P_{\infty}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x).$$

Тогда  $F$  является стационарным распределением последовательности (2), то есть  $P_{\infty} = F$ .

## **АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ РИСКА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ Пороговой обработки**

**Кудрявцев Алексей Андреевич<sup>1</sup>, Шестаков Олег Владимирович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра математической статистики, e-mail: aakudryavtsev@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра математической статистики, e-mail: oshestakov@cs.msu.su

Одной из основных задач анализа и обработки сигналов является шумоподавление. Традиционные методы используют преобразование Фурье для разделения сигнала на высокочастотные и низкочастотные компоненты с последующим удалением высокочастотных компонентов. Однако при этом удаляется и полезная информация, которая содержится в высокочастотной компоненте, и часто сигнал оказывается сильно сглаженным. Вейвлет-разложение обладает свойством локализации по времени и частоте и, таким образом, позволяет анализировать эволюцию частотного спектра с течением времени.

Для подавления шума к вейвлет-коэффициентам применяется функция пороговой обработки, смысл которой заключается в обнулении коэффициентов, абсолютное значение которых меньше некоторого порога. Наиболее распространены жесткая и мягкая пороговая обработка. При этом каждая из них имеет свои недостатки. Функция жесткой пороговой обработки разрывна, что приводит к отсутствию устойчивости и появлению дополнительных артефактов, а функция мягкой пороговой обработки приводит к появлению дополнительного смещения в оценке функции сигнала. В ряде работ были предложены некоторые альтернативные функции пороговой обработки, которые, по сути, являются компромиссом между жесткой и мягкой пороговой обработкой. Эти функции непрерывны и ограничены, но при больших абсолютных значениях коэффициентов похожи на функцию жесткой пороговой обработки. В докладе рассматривается некоторый общий класс таких функций.

Методы выбора порога, как правило, ориентированы на минимизацию среднеквадратичного риска. Вычислить значение этого риска на практике нельзя, поскольку оно зависит от ненаблюдаемых коэффициентов чистого сигнала. Один из подходов к решению этой проблемы основан на минимизации несмещенной оценки риска, построенной по методу Стейна. Эта оценка зависит только от наблюдаемых данных и дает возможность оценивать качество обработанного сигнала без использования тестовых функций. Показано, что в рассматриваемом классе пороговых функций при определенных условиях гладкости данная оценка является сильно состоятельной и асимптотически нормальной.

## АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p$ ДЛЯ $p < 2$

Савушкин Евгений Владимирович<sup>1</sup>, Захарова Татьяна Валерьевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ФГБУ ФИАН им. П.Н. Лебедева, Москва, Россия, e-mail: evsavush@yandex.ru

<sup>2</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики, e-mail: zaharovatv@my.msu.ru

Рассматривается анализ экспоненциальных функционалов, которые играют важную роль в изучении асимптотического поведения случайных процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). Исследуются функционалы вида  $F_\lambda(t) = \mathbb{E}[\exp(\lambda X_t)]$ , где  $X_t$  — решение СДУ, а  $\lambda$  — параметр, позволяющий изучать моментные характеристики процесса  $X_t$ . Экспоненциальные функционалы широко применяются в теории вероятностей и математической физике для оценки устойчивости, сходимости и других свойств стохастических систем.

Рассматриваются два варианта стохастических дифференциальных уравнений для процесса  $X_t$ :

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{\alpha}{t}X_t dt + t^\beta X_t dW_t \\ dX_t &= -\frac{\alpha}{tX_t} dt + t^\beta X_t dW_t, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $W_t$  — стандартный винеровский процесс,  $\alpha$  — параметр, отвечающий за темп затухания,  $\sigma(t, X_t)$  — коэффициент диффузии (шум), выбранный в виде  $\sigma(t, X_t) = t^\beta X_t$ , где  $0 < \beta < 1$ . Первое уравнение описывает систему, в которой дрейф линейно зависит от  $X_t$  и затухает по закону  $1/t$ , тогда как диффузия усиливается через множитель  $t^\beta X_t$ . Во втором уравнении дрейф является нелинейным, обратно пропорциональным  $X_t$ , что делает динамику более сложной и чувствительной к малым значениям  $X_t$ .

Основная цель исследования — определить, как параметры  $\alpha$  и  $\beta$  влияют на долгосрочное поведение процесса  $X_t$ , в частности, на асимптотику вероятностных хвостов его распределения. Под «хвостами» понимается асимптотическое поведение вероятностей  $\mathbb{P}(|X_t| > a)$  при  $a \rightarrow \infty$  и  $t \rightarrow \infty$ . Исследуется, при каких условиях на параметры  $\alpha$  и  $\beta$  существует стационарное распределение  $\pi(x)$ , к которому сходится распределение  $X_t$  при больших временах, и к какому классу доменов притяжения оно относится.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hiroyuki Matsumoto, Marc Yor. Exponential functionals of Brownian motion, I: Probability laws at fixed time // Probability Surveys. 2005. Vol. 2.
- [2] Quentin Berger. Notes on Random Walks in the Cauchy Domain of Attraction // Probability Theory and Related Field. 2019. Vol. 175. p.1-44

## ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ЛОГИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Хохлов Юрий Степанович

Кафедра математической статистики, e-mail: khokhlov\_yskhokhlov@yandex.ru

Наряду с нормальным логистическое распределение является одним из наиболее популярных в различных прикладных задачах. При этом после некоторой нормировки эти два распределения очень похожи друг на друга. Чтобы различать эти два случая используют ту или иную характеристическую задачу. В нашем докладе мы предлагаем некоторую характеристику логистического распределения.

Случайная величина  $L$  имеет стандартное логистическое распределение, если ее функция распределения имеет вид

$$F_L(x) = P(L < x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Если случайная величина  $Z$  имеет стандартное показательное распределение, то прямым вычислением нетрудно показать, что случайная величина  $Y = -\ln(Z)$  имеет функцию распределения

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \exp(-e^{-y}), \quad y \in R^1.$$

Известно, что такое распределение появляется в качестве предельного в схеме максимума и называется **распределением экстремального значения типа I или распределением Гумбеля**. В работе [1] было показано, что для независимых и одинаково распределенных случайных величин  $Y_1$  и  $Y_2$  с распределением Гумбеля случайная величина  $L = Y_1 - Y_2$  имеет логистическое распределение. Далее, используя сказанное выше нетрудно показать, что случайная величина  $R = e^L$  имеет стандартное распределение Парето вида II с функцией распределения

$$F_R(r) = 1 - \frac{1}{1 + r}, \quad r > 0.$$

Для такого распределения известна следующая характеристика (смотри [2]): если случайные величины  $R_1$  и  $R_2$  неотрицательны, независимы и одинаково распределены, то они имеют распределение Парето типа II тогда и только тогда, когда случайные величины

$$\min\left(\frac{1}{1 + R_1}, \frac{1}{1 + R_2}\right) / \max\left(\frac{1}{1 + R_1}, \frac{1}{1 + R_2}\right), \quad \frac{1}{1 + R_1}$$

одинаково распределены.

Это исследование было проведено в соответствии с научной программой Московского центра фундаментальной и прикладной математики и факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dubey D. S. A new derivation of the logistic distribution // Naval Res. Logist. Quarterly, 1969. Vol. 16. P. 37–40.
- [2] Волченкова И. В., Клебанов Л. Б. Характеризация распределения Парето свойствами соседних порядковых статистик. // Записки научных семинаров ПОМИ. - 2019. Т. 486, С. 63-70.

## **МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛОЖНО СТРУКТУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ**

**Машечкин Игорь Валерьевич<sup>1</sup>, Петровский Михаил Игоревич<sup>2</sup>, Горохов Олег Евгеньевич<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ, e-mail: mash@cs.msu.su

<sup>2</sup> МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ, e-mail: michael@cs.msu.su

<sup>3</sup> МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ, e-mail: gorokhov-oe@cs.msu.ru

В современном обществе компьютерные системы играют важную роль. Крупные системы обычно взаимодействуют с большим числом пользователей, что повышает риск несанкционированного доступа к конфиденциальной информации. Поэтому обеспечение информационной безопасности таких систем становится всё более актуальной задачей. Один из способов её решения — анализ поведения пользователей. Это процесс, в ходе которого изучается последовательность действий пользователей в системе. Такой анализ позволяет выявить подозрительные или подозрительные активности, что способствует предотвращению возможных угроз безопасности.

Анализ существующих работ показывает, что информация о каждом действии пользователя фиксируется в специальном журнале событий. Каждое событие может включать как структурированную часть (временная метка, тип устройства), так и неструктурированную — содержимое текстового контента, с которым взаимодействовал пользователь (отправленные письма, изменённые файлы и т.д.). Таким образом, задача обеспечения информационной безопасности путём анализа поведения пользователя сводится к поиску аномалий в потоках сложно структурированных данных, которые представляют собой отдельные действия пользователя (события) [1, 2].

В данной работе предлагается рассмотреть подход к обнаружению аномалий в потоках сложно структурированных данных, основанный на нескольких параллельных свёрточных автокодировщиках, генерирующих признаки по последовательностям событий пользователя, а также на отдельном слое нечёткой кластеризации, который позволяет обнаружить аномалии в построенных свёрточных признаках [3]. Предлагается адаптировать данный подход для задач информационной безопасности.



Для экспериментальной оценки предлагаемого подхода было произведено сравнение с классическими методами обнаружения аномалий (одноклассовый SVM, модели, основанные на архитектуре Трансформер), а также классическими методами построения признакового пространства для текстовых данных (LDA, NMF и др.). На основании проведенных экспериментов было показано, что предлагаемый подход позволяет добиться лучшего результата.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chandola V., Banerjee A., Kumar V. Anomaly Detection: A Survey // ACM Computing Surveys. 2009. V. 41, № 3, P. 15:1–15:58.
- [2] Le V.H., Zhang H. Log-based anomaly detection with deep learning: how far are we? // Proceedings of the 44th International Conference on Software Engineering. 2022. P. 1356–1367.
- [3] Gorokhov O., Petrovskiy M., Mashechkin I., Kazachuk M. Fuzzy CNN Autoencoder for Unsupervised Anomaly Detection in Log Data // Mathematics. 2023. V. 11, № 18,3995.

## **МЕТОДЫ ОТБОРА ПРИЗНАКОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ НЕФТЕПЕРЕРАБОТКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ**

**Машечкин Игорь Валерьевич, Петровский Михаил Игоревич, Лазухин  
Иван Сергеевич**

Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail:  
mash@cs.msu.ru, michael@cs.msu.ru, ivanlazuhin@mail.ru

Сейчас, в связи с развитием систем автоматизированного управления, предприятия накапливают большие объемы данных о состоянии технологических процессов. Множества физических датчиков фиксируют состояние системы в каждый момент времени – они отвечают за управление системой и поддержку ее параметров в допустимых пределах. Одновременно с этим, значительную часть качественных характеристик подобных процессов, в частности, связанных с нефтехимической промышленностью, составляют лабораторные исследования, проводимые раз в несколько часов. На практике, обобщения лабораторных исследований представлены линейными моделями или кусочно– постоянными интерполяциями.

Поставим задачу построения «виртуальных датчиков» как задачу получения химических показателей производственного процесса в реальном времени на основе значений физических переменных процесса. Авторы исследуют набор данных, собранный на нефтеперерабатывающем предприятии в течение года. Он включает в себя большое число физических переменных и один целевой лабораторный показатель. К особенностям лабораторных данных относятся

разреженность по наличию пропусков (которые невозможно заполнить точно в каждый непрерывный момент времени), неточность оценки показателей – каждый лабораторный показатель имеет пределы воспроизводимости.

В работе были рассмотрены следующие подзадачи, связанные с построением виртуальных анализаторов:

1. Отбор признаков для уменьшения размерности – объем показаний целевой переменной близок к размеру входного пространства признаков;
2. Заполнение пропусков (экстраполяция моментов времени, когда лабораторные измерения не проводились) – построение виртуальных датчиков;
3. Прогнозирование лабораторных показателей на основе скользящих окон исторических данных физических параметров.

Были предложены и оценены следующие методы отбора признаков, учитывающие мнение эксперта:

1. Иерархическая кластеризация физических переменных на основе регрессии частичных наименьших квадратов, учитывающая отклик;
2. Отбор на основе деревьев Байеса по алгоритму Чоу-Лю (англ. Chow-Liu);
3. Оценка важности физических переменных относительно отклика и между собой на основе существующей графовой нейросетевой архитектуры, модифицированной для работы без авторегрессии;
4. Неявный отбор признаков в виде модификация существующего метода регуляризации [1].

Предложенные подходы, а также существующие популярные способы отбора признаков (LASSO, деревья решений) оценивались в рамках объединенной задачи аппроксимации и прогнозирования лабораторных показаний на один час с использованием популярных нейросетевых архитектур прогнозирования временных рядов (рекуррентные сети, полносвязные и графовые архитектуры [2]). Полученные модели не только показывают высокое качество экстраполяции исследуемых данных, но и эффективно используют экспертное мнение.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ou C. et al. Quality-driven regularization for deep learning networks and its application to industrial soft sensors //IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2022.
- [2] Cao D. et al. Spectral temporal graph neural network for multivariate time-series forecasting //Advances in neural information processing systems. 2020. Т. 33. С. 17766–17778.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА ВЕКТОРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕТКИ ПРОГРАММНОГО КОДА**

**Пасконова Людмила Владимировна, Чернов Александр Владимирович**

Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: paskonova.lv@gmail.com,  
blackav@gmail.com

Разметка программного кода представляет собой процесс структурирования и аннотирования исходного кода с целью выделения его ключевых компонентов: синтаксических конструкций, логических блоков, потенциальных ошибок, а также признаков, отражающих его происхождение. Примерами применения данной методики могут служить поиск уязвимостей [1] и выявление искусственно сгенерированного кода [2].

Классические подходы к решению задачи разметки программного кода включают статический анализ [3] и классификаторы на основе машинного обучения или нейронных сетей [4]. Однако подобные решения зачастую требуют предварительного задания набора искомых признаков, что приводит к необходимости тщательного отбора данных и ограничивает область применения, как, например, поиск исключительно уязвимости CWE-119 в [1].

В рамках данной работы рассмотрены различные методы построения векторных представлений и выделения признаков в программном коде. В результате разработана платформа для обучения и тестирования моделей машинного обучения, позволяющая выполнять семантическую сегментацию исходных программ без необходимости создания фиксированного словаря признаков. Платформа включает токенизатор на основе синтаксических деревьев для преобразования исходного кода в последовательность токенов, модуль, позволяющий получить векторное представление отдельных токенов, архитектуру на основе сверточной нейронной сети и механизма внимания для решения задач классификации, программное обеспечение для анализа и оценки обученной модели.

Предложенный метод был апробирован на трех задачах: обнаружение ошибок в студенческих программах, детекция уязвимостей и идентификация кода, созданного искусственным интеллектом. Обучение моделей производилось на видеокάρтах сервера лаборатории кафедры интеллектуальных информационных технологий.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Automated Vulnerability Detection in Source Code Using Minimum Intermediate Representation Learning / Li X., Wang L., Xin Y., Yang Y., Chen Y. // Applied Sciences. 2020. Volume 10, № 5. P. 1692.

- [2] An Empirical Study on Automatically Detecting AI-Generated Source Code: How Far Are We? / Suh H., Tafreshipour M., Li J., Bhattiprolu A., Ahmed I. // arXiv. 2024. eprint. 2411.04299.
- [3] Brooks T.N. Survey of Automated Vulnerability Detection and Exploit Generation Techniques in Cyber Reasoning Systems. // In Proceedings of the Science and Information Conference, London, UK, 10-12 July 2018.
- [4] Automated Vulnerability Detection in Source Code Using Deep Representation Learning / Russell R.L., Kim L., Hamilton L.H., Lazovich T., Harer J.A., Ozdemir O., Ellingwood P.M.; McConley M.W. // arXiv. 2018. eprint. 1807.04320.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА TIME-VARYING МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДЕГРАДАЦИИ ЖЕСТКИХ ДИСКОВ**

**Петровский Михаил Игоревич, Васильев Юлий Алексеевич,  
Говердовский Марк Васильевич**

Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: michael@cs.msu.ru,  
iuliivasilev@gmail.com, s02220058@gse.cs.msu.ru

Анализ выживаемости представляет собой набор статистических методов, которые позволяют предсказывать ожидаемое время до наступления события, а также оценивать риски в реальном времени. Данный подход находит широкое применение в задачах анализа надёжности. Он может использоваться для оценки срока службы оборудования или выявления подверженных риску компонентов системы.

Особенностью задач выживаемости является наличие цензурированных данных, для которых истинное время события неизвестно. Для жёстких дисков цензурирование происходит в момент извлечения диска из системы до поломки или при прекращении мониторинга за исправными дисками.

Классические методы анализа выживаемости основываются на предположении, что относительный риск наступления события для двух различных наборов признаков не изменяется во времени [1]. Однако данное предположение не выполняется при использовании изменяющихся во времени признаков.

Time-varying методы анализа выживаемости позволяют учитывать динамику изменения ковариат во времени, преодолевая ограничения пропорциональности рисков. В работе оценивается эффективность модификации модели пропорциональных рисков Кокса, адаптированной для работы с временно-зависимыми ковариатами [2]. В частности, для применения методов на практике поднимается вопрос о влиянии частоты сбора данных на качество прогноза.

Экспериментальное исследование было проведено на наборе данных жёстких дисков за 2017-2018 годы компании Backblaze [3]. Состояние диска описывается с помощью параметров S.M.A.R.T. (Self-Monitoring, Analysis and

Reporting Technology). Они включают такие показатели, как количество ошибок чтения/записи, температура и количество циклов включения/выключения. Некоторые из этих признаков напрямую отражают работоспособность диска и активно изменяются в процессе эксплуатации, например, частота ошибок при позиционировании блока магнитных головок.

На основе оценки качества по метрикам Concordance Index и IBS, максимальное качество прогнозирования ( $CI=0.83$ ,  $IBS=0.2$ ) достигается при сборе от 5 до 20 наблюдений для каждого жесткого диска.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wang P., Li Y., Reddy C. K. Machine learning for survival analysis: A survey //ACM Computing Surveys (CSUR). 2019. Т. 51. №. 6. С. 1-36.
- [2] Kleinbaum D. G., Klein M. Extension of the Cox Proportional Hazards Model for Time-Dependent Variables // Survival Analysis. Statistics for Biology and Health. Springer, New York, NY. С.244-277.
- [3] Pinciroli R. et al. Machine learning models for SSD and HDD reliability prediction //2022 Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS). – IEEE, 2022. – С. 1-7.

## ИНДЕКС ЭКОЛОГИЧЕСКОГО БЛАГОПОЛУЧИЯ НА ОСНОВЕ ОТКРЫТЫХ ДАННЫХ И НЕЧЁТКОЙ ЛОГИКИ

**Рыжов Александр Павлович, Двоеглазов Роман Александрович**

Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: alexander.ryjov@gmail.com, romackad@gmail.com

Изменение климата, утрата биоразнообразия, загрязнение воздуха и воды, накопление отходов указывают на необходимость принятия мер по защите окружающей среды. Организацией Объединённых Наций были сформулированы Цели Устойчивого Развития (ЦУР) [1], служащие ориентиром для правительств государств-членов ООН и международного сообщества в этой области. В принятых в 2015 году ЦУР ООН [2] особое внимание уделяется защите окружающей среды (Цель 14: Сохранение морских экосистем и Цель 15: Сохранение экосистем суши), устойчивому использованию природных ресурсов (Цель 12: Ответственное потребление и производство) и борьбе с изменением климата (Цель 13: Борьба с изменением климата). В результате государства вынуждены не только менять свое отношение к ресурсам планеты, но и сотрудничать на международном уровне для достижения устойчивого будущего для всех. Каждое правительство заинтересовано в эффективной оценке и мониторинге экологической ситуации. Сказанное определяет актуальность темы исследования.

В докладе даётся краткий анализ известных подходов к измерению индекса экологического благополучия и формулируются проблемы их использования.

Предлагается подход на основе нечетких правил, свободный от сформулированных выше проблем. Приводится несколько примеров применения индекса, демонстрирующих эффективность и адекватность предлагаемого подхода. Обсуждаются аналитические возможности индекса: задача сравнения (сопоставление результатов использования индекса между регионами, их ранжирование), прямая (поиск параметров, небольшие изменения которых приводят к существенным изменениям индекса) и обратная (достижение максимального эффекта в рамках заданного бюджета и достижение заданного эффекта при минимальном бюджете) задачи. Также дается краткий анализ хорошо зарекомендовавшего себя Индекса алкогольного благополучия, построенного на таких принципах [3].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Организация Объединённых Наций: Повестка дня в области устойчивого развития на период до 2030 года. URL: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/ru/about/development-agenda/>
- [2] Организация Объединённых Наций: Цели Устойчивого Развития. URL: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/ru/>
- [3] Рыжов А. П., Горный Б. Э., Зудин А. В. Оценка и мониторинг алкогольного благополучия регионов на основе статистической информации // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, Т. 27, № 2, 2023, С. 5–18.

## **СИСТЕМА КОНТРОЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ СРЕДСТВАМИ ГИБРИДНОГО ИНТЕЛЛЕКТА: ПРИЗНАКИ ДИНАМИКИ**

**Шергин Иван Андреевич, Рыжов Александр Павлович**

Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: [i.a.shergin@gmail.com](mailto:i.a.shergin@gmail.com),  
[alexander.ryzov@gmail.com](mailto:alexander.ryzov@gmail.com)

В докладе рассматривается проблема управления процессом обучения выполнению физических упражнений и его оптимизации на основе персональных рекомендаций. Применяются методы 2D-оценки позы человека и нечеткого управления для построения системы, позволяющей как контролировать процесс выполнения физических упражнений, так и проводить его оптимизацию для конкретного пользователя на основе выработки рекомендаций, учитывающих персональные особенности.

Методы для оценки позы человека возникли в 2014 г. [1], они предоставляют функционал для определения положения частей тела человека на картинке или видеоряде. На их основе возникли работы по оценке выполнения физических упражнений [2], в том числе с использованием нечеткой логики [3]. Но су-

ществующие подходы не предлагают достаточно гибкой системы контроля со стороны тренера.

В докладе представлен подход для формирования признаков, с помощью которых можно описать ход выполнения человеком произвольного физического упражнения: классификация набора признаков на статические и динамические. Первые могут быть вычислены на основе одно кадра выполнения, а вторые характеризуют динамику процесса выполнения. Примерами динамических признаков являются «интенсивность», «выносливость», «синхронность». В работе рассмотрены особенности формирования таких признаков и работы с ними. Накопленный опыт позволяет перейти к формированию системы нечетких правил на базе полученных признаков для осуществления контроля хода выполнения упражнений.

Такие системы гибридного интеллекта могут быть полезны в спорте, здравоохранении, реабилитации [4]. Реализация таких систем в виде веб или мобильного приложения позволит проводить совершенствование физических навыков самостоятельно, сократит время обучения, снизит травматичность.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Toshev A., Szegedy C. DeepPose; Human Pose Estimation via Deep Neural Networks, IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2014
- [2] A Method for Specifying Yoga Poses Based on Deep Learning, Utilizing OpenCV and Media Pipe Technologies, 2024.
- [3] Evaluating Simple Exercises with a Fuzzy System Based on Human Skeleton Poses, 2023.
- [4] Mahendran N. Deep Learning for Fitness, 2021

## УТОЧНЕННЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ШЕННОНА ДЛЯ ГЛУБИНЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

**Ложкин Сергей Андреевич, Сергеев Максим Денисович**

Кафедра математической кибернетики, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru, srgvmsm@mail.ru

Одной из моделей, используемых в математической кибернетике для описания вычислительных устройств, являются формулы над стандартным базисом  $B_0 = \{x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}\}$ , каждый функциональный элемент которого имеет единичную глубину (задержку) и реализует соответствующую функцию алгебры логики (ФАЛ) (см., например, [1]).

Для формулы над конечным полным базисом  $B$  с положительными глубинами его элементов определяется ее глубина, которая равна максимальной сумме глубин элементов, образующих в результате их последовательного соединения цепь, и которая характеризует время её вычисления. Для произвольной ФАЛ  $f$  ее глубина  $D_B(f)$  определяется как минимальная глубина реализующих ее

формул, а затем обычным образом вводится функция Шеннона  $D_B(n)$  как максимальная из глубин ФАЛ  $f$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

В работе [1] было установлено, что при  $n = 1, 2, \dots$  имеет место равенство  $D_B(n) = \tau_B(n \pm O(\log_2(n)))$ , где  $\tau_B$  — некоторая константа, зависящая от базиса  $B$ , а в работе [2] было получено равенство  $D_B(n) = \tau_B(n - \log_2 \log_2(n)) \pm O(1)$ . Что касается поведения функции Шеннона  $D_{B_0}(n) = D(n)$ , то оно оно последовательно уточнялось в работах [3–5], причем в последней из них было доказано, что

$$\lceil n - \log_2 \log_2(4n) \rceil \leq D(n) \leq \left\lceil n - \log_2 \log_2(n) + O\left(\frac{\log_2 \log_2(n)}{\log_2(n)}\right) \right\rceil \quad (1)$$

В данной работе верхняя оценка (1) уточняется следующим образом.

**Теорема.** Для  $n = 1, 2, \dots$  выполняется неравенство

$$D(n) \leq \left\lceil n - \log_2 \log_2(n) + O\left(\frac{1}{\log_2(n)}\right) \right\rceil \quad (2)$$

Оценки (1)–(2) позволяют утверждать, что, с учетом мощностного характера нижней оценки (1), для почти всех  $n$  и почти всех ФАЛ  $f$  от  $n$  переменных верно, что  $D(f) = \lceil n - \log_2 \log_2(n) \rceil$ . При этом, чем ближе верхняя оценка к нижней, тем больше «доля» тех значений  $n$ , для которых это равенство гарантированно выполняется для почти всех ФАЛ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками // Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 23, М: Наука. 1970. С. 44–81.
- [2] Ложкин С. А. О глубине функций алгебры логики в произвольном полном базисе // Вестник МГУ им. М. В. Ломоносова. Математика. Механика. 1996. № 2. С. 80–82.
- [3] Spira P. M. On the time necessary to compute switching function // «IEEE Trans». C–20. 1971. № 1. P. 104–105.
- [4] Гашков С. Б. О глубине булевых функций // Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 34, М: Наука. 1978. С. 256–268.
- [5] Ложкин С. А. О глубине функций алгебры логики в некоторых базиса // «ANNALES Budapest Univ». Sectio Computatorica. 1983, Tomus IV. С. 113–125.



## О ПРОВЕРКЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРОСТЫХ ПРОГРАММ НАД ДВОИЧНЫМИ ДЕРЕВЬЯМИ

Шагов Виталий Сергеевич, Подымов Владислав Васильевич

Кафедра математической кибернетики, e-mail: ezhopets@yandex.ru, valdus@yandex.ru

Проблема функциональной эквивалентности программ заранее заданного класса состоит в том, чтобы для двух произвольных программ этого класса выяснить, реализуется ли ими одна и та же функция преобразования входных данных в выходные. Двоичное дерево  $T$  введём с помощью формы Бэкуса — Наура (БНФ) « $T ::= nil \mid T.T$ », где  $nil$  — дерево из одной вершины и  $T_1.T_2$  — корневое дерево с левым поддеревом  $T_1$  и правым поддеревом  $T_2$ . В [1] введён класс программ над двоичными деревьями (то есть преобразующих двоичные деревья в двоичные деревья) относительно простого устройства, имеющий алгоритмически разрешимую проблему функциональной эквивалентности, и предложен соответствующий алгоритм проверки эквивалентности. С учётом работы [2], исправляющей некоторые технические неточности, можно считать, что этот класс программ задаётся БНФ

$$\pi ::= I \mid hd \mid tl \mid nil \mid cons(\pi, \pi) \mid ifnil(\pi, \pi, \pi)$$

со следующим смыслом  $[\pi]$  программы  $\pi$  как преобразователя деревьев:  $[I](T) = T$ ;  $[hd](T)$  и  $[tl](T)$  — это левое и правое поддерево дерева  $T$  соответственно ( $[hd](nil) = [tl](nil) = nil$ );  $[nil](T) = nil$ ;  $[cons(\pi_1, \pi_2)](T) = [\pi_1](T).[ \pi_2](T)$ ;  $[ifnil(\pi_1, \pi_2, \pi_3)](T) = [\pi_2](T)$ , если  $[\pi_1](T) = nil$ , и  $[\pi_3](T)$  иначе. Предложенный в [1] алгоритм проверки эквивалентности устроен в целом так: программы эквивалентно преобразуются к особому виду — нормальной форме; особым образом анализируется эквивалентность полученных программ в нормальной форме. Для этого алгоритма в [1] приводится оценка сложности  $O(c^{2N+1})$  для некоторой константы  $c$  и размера  $N$  программ после приведения к нормальной форме, но не анализируется соотношение размеров исходных программ и преобразованных, то есть вопрос о сложности решается не полностью. В [2] приводится улучшенный алгоритм с порядком сложности  $O(c^N)$ , но соотношение между  $N$  и размером исходных программ также не исследуется. В данной работе предлагаются алгоритм проверки эквивалентности программ рассматриваемого класса с порядком сложности  $O(c^{2^n})$  относительно размера  $n$  исходных программ и оценка  $N = O(3^n \cdot 3^{3^n})$ , что в сочетании с несложно доказываемой грубой оценкой  $N = \Omega(2^n)$  даёт первоначальное представление о том, насколько более эффективным является предлагаемый алгоритм по сравнению с известными, упомянутыми выше.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Krustev D. Simple programs on binary trees — testing and decidable equivalence // Proceedings of the Fifth International Valentin Turchin Workshop on Metacomputation. Pereslavl-Zalessky, Russia : Publishing of Pereslavl-Zalessky University, 2016. P. 126–138.
- [2] Балашов А. В. Тестирование и проверка эквивалентности простых программ над двоичными деревьями. Выпускная квалификационная работа. МГУ, 2023.

## ТОЧКИ СОВПАДЕНИЯ ДВУХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИ РАВЕНСТВЕ КОНСТАНТ НАКРЫВАНИЯ И ЛИПШИЦА

Арутюнов Арам Владимирович, Васянин Олег Александрович

Лаб. 45 ИИУ РАН, e-mail: arutyunov@cs.msu.ru, o.vasyanin@gmail.com

Работа посвящена исследованию задачи о точке совпадения  $\alpha$ -накрывающего и  $\beta$ -липшицева отображений [1] в критическом случае, когда константа накрывания  $\alpha$  равна константе Липшица  $\beta$ . В этом случае точки совпадения отображений, вообще говоря, может не быть. Но можно доказать, что она существует, несколько усилив имеющееся условие Липшица.

**Определения и обозначения.** Пусть  $X, Y$  — это метрические пространства, а  $\Phi$  и  $\Psi$  — это однозначные или многозначные отображения, действующие между  $X$  и  $Y$ .

**Определение 1.** Пусть задано число  $\alpha > 0$ . Отображение  $\Psi : X \rightarrow Y$  называется  $\alpha$ -накрывающим, если выполнено включение

$$B^Y(\Psi(x), \alpha r) \subset \Psi(B^X(x, r)) \quad \forall x \in X, \forall r \geq 0,$$

где через  $B^Z(x, r)$  обозначается замкнутый шар в метрическом пространстве  $Z$  с центром  $x \in Z$  и радиусом  $r \geq 0$ .

Если отображение  $\Psi : X \rightrightarrows Y$ , т. е. является многозначным, то определение остается таким же.

Пусть непрерывная справа и неубывающая функция  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  такова, что  $\gamma(t) < \beta t$  при каждом  $t > 0$ . Рассмотрим ряд из ее итераций

$$A_\gamma(t) = t + \gamma(t) + \gamma(\gamma(t)) + \dots$$

при  $t > 0$  (см., например, работу [2]).

Рассмотрим однозначное отображение  $\Phi : X \rightarrow Y$  такое, что

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \gamma(\rho_X(x_1, x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (1)$$

Такие отображения рассматривались, в частности, в работе [3].

Наряду с однозначным рассмотрим многозначное отображение  $\Phi : X \rightrightarrows Y$  такое, что

$$h(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \gamma(\rho_X(x_1, x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X, \quad (2)$$

где  $h(M, N) = \inf\{r \geq 0 \mid M \subset B^Y(N, r), N \subset B^Y(M, r)\}$  — расстояние по Хаусдорфу между замкнутыми множествами  $M, N \subset Y$ . Отображение  $\Phi$  также является  $\beta$ -липшицевым.

### Основные результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства, причем пространство  $X$  является полным, отображение  $\Psi : X \rightarrow Y$  является  $\alpha$ -накрывающим и непрерывным, а отображение  $\Phi : X \rightarrow Y$  удовлетворяет (1), причем  $\alpha = \beta$ , а ряд  $A_\gamma(t)$  сходится при всех  $t > 0$ . Тогда у  $\Phi$  и  $\Psi$  существует точка совпадения, т. е. точка  $\xi \in X$  такая, что  $\Phi(\xi) = \Psi(\xi)$ .

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства, отображение  $\Psi : X \rightrightarrows Y$  является  $\alpha$ -накрывающим и его график  $\text{grh } \Psi$  замкнут, отображение  $\Phi : X \rightrightarrows Y$  удовлетворяет (2), причем  $\alpha = \beta$ , а ряд  $A_\gamma$  сходится при всех  $t > 0$ . Тогда, если хотя бы одно из множеств  $\text{grh } \Phi$ ,  $\text{grh } \Psi$  является полным относительно метрики на  $X \times Y$ , то у  $\Phi$  и  $\Psi$  существует точка совпадения, т. е. точка  $\xi \in X$  такая, что  $\Phi(\xi) \cap \Psi(\xi) \neq \emptyset$ .

Работа выполнена при поддержке гранта № 25-11-00060.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
- [2] Семенов П. В. Об эквивалентности некоторых утверждений о неподвижных точках сжатий // Функциональный анализ и его приложения. 2017. Т. 51, вып. 4. С. 92–95.
- [3] Арутюнов А. В. Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения // Труды МИАН. 2015. Т. 291. С. 30–44.

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕХАНИЗМА ВНИМАНИЯ В МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

Бегишев Руслан Ренатович<sup>1</sup>, Ильин Александр Владимирович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: begrusso@gmail.com

<sup>2</sup> д.ф.-м.н. Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: iline@cs.msu.ru

Развитие робототехники в современном мире предоставляет большой класс новых задач. К ним относятся задачи, связанные с многоагентными приложениями. Эта область активно исследуется в двух направлениях: классические подходы, основанные на стандартных алгоритмах, и подходы, использующие нейросетевые модели. Рассматривается второй подход с использованием обучения с подкреплением. В данном направлении существуют некоторые результаты, описывающие решения для разных видов задач [1][2].

**Постановка задачи.** В области с препятствиями действует группа двухколёсных неголономных роботов, оснащённых датчиками лидар. Необходимо сгруппировать агентов в динамически определяемой точке, после чего группа должна проследовать в целевую точку, избегая препятствий и сохраняя заданную плотность построения.

**Предложенное решение.** Предлагается использовать метод обучения актёр – критик с оптимизационной стратегией Proximal Policy Optimization (PPO). Используется централизованное обучение и децентрализованное исполнение. Централизованное обучение позволяет контролировать процесс формирования стратегий. Входом нейронной сети каждого агента являются показания лидара, а также информация о нескольких предыдущих действиях. Выходом сети являются новые значения для линейной и угловой скорости. Для учёта контекста о прошлых шагах предложено использовать механизм внимания [3]. Данный подход позволяет агенту принимать решения о задании скорости, используя некоторый контекст о предыдущих принятых решениях.

Показателями качества работы алгоритма является скорость выполнения поставленной задачи, а также плотность группировки роботов, которая сохраняется на этапе движения от места сбора к целевой точке.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gupta, Jayesh K., Maxim Egorov, and Mykel Kochenderfer. 2017. «Cooperative multiagent control using deep reinforcement learning.» In *Autonomous Agents and Multiagent Systems Workshops, Revised Selected Papers*, 10642:66–83. *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.
- [2] Dinneweth, Joris, Abderrahmane Boubouzou, René Mandiau, and Stéphane Espié. 2022. «Multi-agent reinforcement learning for autonomous vehicles: A survey.» *Autonomous Intelligent Systems* 2 (1): 27

- [3] Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A. N., ... Polosukhin, I. (2017). Attention is all you need. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (pp. 5998–6008).

## ОБОБЩЕННЫЕ СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Жуковская Зухра Тагировна, Жуковский Сергей Евгеньевич

ИПУ РАН, лаб. 45, e-mail: zuxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

**Обобщенные седловые точки.** Пусть заданы непустые множества  $X_1, X_2$ , точка  $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$  и ограниченная функция  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Напомним, что точка  $x^*$  называется седловой точкой функции  $f$ , если

$$\inf_{x_1 \in X_1} f(x_1, x_2^*) = f(x_1^*, x_2^*) = \sup_{x_2 \in X_2} f(x_1^*, x_2).$$

Напомним теперь понятие обобщенной седловой точки. Для каждой точки  $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$  положим

$$\Psi(x_1, x_2) = \sup_{\xi_2 \in X_2} f(x_1, \xi_2) - \inf_{\xi_1 \in X_1} f(\xi_1, x_2).$$

Очевидно, что  $\Psi(x_1, x_2) \geq 0$  для всех  $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ . Кроме того, несложно показать, что точка  $x^*$  является седловой тогда и только тогда, когда  $\Psi(x^*) = 0$ . Таким образом, естественно определить обобщенную седловую точку следующим образом.

**Определение.** Точка  $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in X$  называется обобщенной седловой точкой функции  $f$ , если  $\Psi(x^*) = \min\{\Psi(x) : x \in X_1 \times X_2\}$ .

Это определение было введено в [1]. Из него получаем следующие простые утверждения.

Каждая седловая точка функции  $f$  является обобщенной седловой точкой. Если  $f$  имеет седловые точки, то они и только они являются обобщенными седловыми точками функции  $f$ .

Всюду ниже будем считать, что  $X_1, X_2$  — это компактные подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$ , а функция  $f$  непрерывна. Тогда функция  $\Psi$  непрерывна.

Функция  $f$  может не иметь седловых точек. Однако, по теореме Вейерштрасса обобщенные седловые точки у функции  $f$  существуют.

**Устойчивость обобщенных седловых точек.** Пусть  $\Sigma$  — это компактное метрическое пространство, заданы многозначные отображения  $X_1, X_2 : \Sigma \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ , которые каждому  $\sigma \in \Sigma$  ставят в соответствие непустые компактные множества  $X_1(\sigma), X_2(\sigma)$ . Пусть задана непрерывная функция  $f$  переменных  $(x_1, x_2, \sigma)$ , определенная на пространстве  $\{(x_1, x_2, \sigma) : x_1 \in X_1(\sigma), x_2 \in X_2(\sigma), \sigma \in \Sigma\}$  с топологией, индуцированной топологией произведения  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Sigma$ . Пусть задана точка  $\sigma^* \in \Sigma$ .

При каждом  $\sigma \in \Sigma$  обозначим через  $GSP(\sigma)$  множество всех обобщенных седловых точек функции  $f(\cdot, \cdot, \sigma)$ . Как отмечалось выше, это множество пусто.

**Определение.** *Обобщенную седловую точку  $x^*$  функции  $f(\cdot, \cdot, \sigma^*)$  будем называть устойчивой, если имеет место соотношение*

$$\text{dist}(x^*, GSP(\sigma)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \sigma^*.$$

Справедливо следующее утверждение об устойчивости.

**Теорема.** *Предположим, что многозначные отображения  $X_1(\cdot)$  и  $X_2(\cdot)$  непрерывны в точке  $\sigma^*$ . Пусть  $x^*$  — это единственная обобщенная седловая точка функции  $f(\cdot, \cdot, \sigma^*)$ .*

*Тогда  $x^*$  — это устойчивая обобщенная седловая точка функции  $f$ .*

Приведем теперь утверждение об устойчивости седловых точек, вытекающее из приведенной теоремы.

**Теорема.** *Предположим, что многозначные отображения  $X_1(\cdot)$  и  $X_2(\cdot)$  непрерывны в точке  $\sigma^*$ . Пусть  $x^*$  — это единственная седловая точка функции  $f(\cdot, \cdot, \sigma^*)$ . Тогда для любого  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\sigma \neq \sigma^*$ , для которого существует  $x(\sigma)$ , являющаяся седловой точкой функции  $f(\cdot, \cdot, \sigma)$ , имеет место*

$$x(\sigma) \rightarrow x^* \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \sigma^*.$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ (проект № 24-21-00012).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Arutyunov A. V., Zhukovskiy S. E. On stability of the generalized saddle points // Optimization. 2024. Vol. 73, № 12. P. 3519–3536. 2015. Т. 1, № 2. С. 33–47.

# О ЗАДАЧЕ СУБОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Каменщиков Михаил Александрович

Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: mkamenshchikov@cs.msu.ru

В работе рассматривается задача о построении субоптимальных фильтров (оптимальных фильтров пониженного порядка), восстанавливающих несмещённую и оптимальную оценку линейного функционала от фазового вектора состояния гибридных объектов управления со стохастическими возмущениями по измеряемому дискретному выходу. Возмущения в системе представляют аддитивные белые шумы в непрерывном и дискретном времени с априорно известными вероятностными характеристиками, некоррелированные с начальным состоянием системы и воздействующие как на непрерывный объект, так и на

канал дискретных измерений. В качестве критерия оптимальности выбирается интегральная среднеквадратичная ошибка в установившемся режиме.

Ранее [1] были предложены методы построения субоптимальных фильтров в задаче совместной стабилизации и оптимальной фильтрации отдельно для непрерывных и отдельно для дискретных систем управления, методы синтеза функциональных наблюдателей для стохастических систем, основанные на канонических представлениях, в задаче диагностики.

В работе для стохастических гибридных систем (непрерывная динамика и дискретные измерения) предлагается нацеленный на развитие предыдущих результатов [2] подход для синтеза фильтров пониженного порядка. Предложенный подход позволяет установить явную зависимость критерия оптимальности от неизвестных параметров искомым фильтров. Кроме того, предлагаются необходимые и достаточные условия несмещённости оценок, формируемых непрерывно-дискретными функциональными наблюдателями в задаче совместной фильтрации и управления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Каменщиков М. А. Методы построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка для линейных стационарных динамических систем : дис. . . . канд. физ.-мат. наук : 1.1.2 / Каменщиков Михаил Александрович. М., 2023. 156 с.
- [2] Каменщиков М. А. Синтез непрерывно-дискретных фильтров пониженного порядка // Тезисы докладов Научной конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 20 марта–03 апреля 2024 г.). М. : ООО МАКС Пресс, 2024. С. 64–65.

## **МАЖОРИЗАЦИЯ ПО ЛОРЕНЦУ В МОДЕЛИ РАМСЕЯ-БЬЮЛИ**

**Парастаев Григорий Сергеевич<sup>1</sup>, Шананин Александр Алексеевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра системного анализа, e-mail: parastaew1996@yandex.ru

<sup>2</sup> Кафедра системного анализа, e-mail: alexshan@yandex.ru

Настоящая работа посвящена изучению кривой Лоренца для континуального аналога модели социальной динамики Рамсея-Бьюли, поведение которой исследовано в работе [1]. Задача Коши для уравнения динамики кривой Лоренца

имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{r}{1 - \beta} \left[ \int_0^x \left( 1 - \varphi \left( \frac{\partial y(w, t)}{\partial w} \right) \right) \frac{\partial y(w, t)}{\partial w} dw - \right. \\ \left. -y(x, t) \int_0^1 \left( 1 - \varphi \left( \frac{\partial y(w, t)}{\partial w} \right) \right) \frac{\partial y(w, t)}{\partial w} dw \right], \quad x \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in [0, 1] \\ y(0, t) = 0, \quad y(1, t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right. \quad (1)$$

Для уравнения динамики (1) доказывается утверждение о том, что для любых моментов времени  $t', t''$  таких, что  $t' > t''$ , кривая  $y(\cdot, t')$  мажорирует по Лоренцу кривую  $y(\cdot, t'')$ , то есть для каждого  $x \in [0, 1]$  справедливо неравенство  $y(x, t') \leq y(x, t'')$ .

Далее, по желаемой с точки зрения общественного договора кривой Лоренца  $\hat{y}(\cdot)$  подбирается такая функция перераспределения доходов  $\tilde{\psi}(\cdot)$ , соответствующая передачам Пигу-Дальтона, что функция  $\hat{y}(\cdot)$  оказывается единственным стационарным гладким решением задачи Коши для интегродифференциального уравнения в частных производных вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{r}{1 - \beta} \left[ \int_0^x \left( 1 - \varphi \left( \frac{\partial y(w, t)}{\partial w} \right) \right) \tilde{\psi}(y(w, t)) dw - \right. \\ \left. -y(x, t) \int_0^1 \left( 1 - \varphi \left( \frac{\partial y(w, t)}{\partial w} \right) \right) \tilde{\psi}(y(w, t)) dw \right], \quad (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in [0, 1] \\ y(0, t) = 0, \quad y(1, t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right. \quad (2)$$

В результатах численных экспериментов наблюдается сходимость к стационарному решению  $\hat{y}(x)$ , что может указывать на его устойчивость по Ляпунову, а также сходимость во времени индекса Джини, построенного по кривой Лоренца как решению задачи (2).

Работа выполнена при поддержке РФФ (грант № 24-11-00329).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Парастаев Г. С., Шананин А. А. Гипотеза Рамсея о социальной стратификации как принцип отбора по Фишеру // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64, № 12. С. 2420–2448.



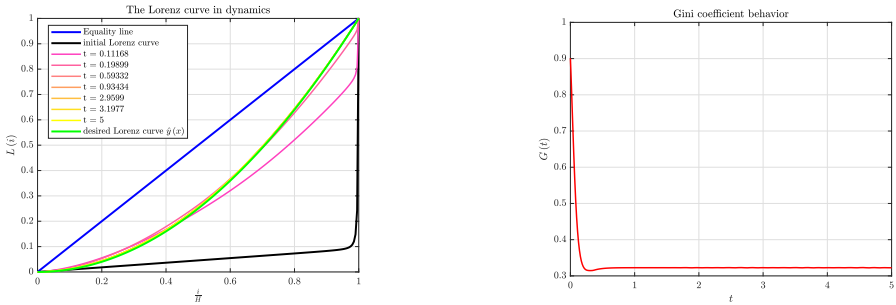


Рис. 1: Динамика кривой Лоренца и индекса Джини.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КРУПНЫХ МИРОВЫХ ЭКОНОМИК С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛЕЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА С УЧЕТОМ ЗАМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ

Рыбакова Александра<sup>1</sup>, Обросова Наталия Кирилловна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного анализа, e-mail: s02230494@gse.cs.msu.ru

<sup>2</sup> Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, e-mail: ГСП-1, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия

Классическим подходом для описания межотраслевых связей является линейная модель межотраслевого баланса Леонтьева, которая предполагает жесткие пропорции материальных затрат при производстве. Однако, увеличение номенклатуры товаров приводит к росту возможности замещения производственных факторов, поэтому для описания производства могут использоваться производственные функции, допускающие замещение и используемые в нелинейных моделях межотраслевого баланса [1].

В работе рассматриваются возможности использования таких моделей с точки зрения описания экономик разного типа для трех видов производственных функций  $F_j(X^j, l^j)$ , описывающих выпуск отрасли  $j$  в зависимости от промежуточных ресурсов  $X^j$  и первичных  $l^j$ :

1. Функции Леонтьева:

$$F_j(X^j, l^j) = \min \left( \frac{X_1^j}{a_{1j}}, \dots, \frac{X_m^j}{a_{mj}}, \frac{l_1^j}{b_{1j}}, \dots, \frac{l_n^j}{b_{nj}} \right),$$

где  $a, b$  - коэффициенты прямых затрат

2. Функции Кобба-Дугласа:

$$F_{KD}(X_1, \dots, X_n) = AX_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}, A > 0,$$

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1,$$

где  $\alpha_j$  характеризует постоянные фишашсовы пропорции затрат

3. Функции с постоянной эластичностью замещения  $1/(1 + \rho)$  (CES):

$$F_j(X^j, l^j) = \left( \sum_{i=1}^m \left( \frac{X_i^j}{(a_i^j)^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}}} \right)^{-\rho_j} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{l_k^j}{(b_k^j)^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}}} \right)^{-\rho_j} \right)^{-\frac{1}{\rho_j}}$$

Нелинейная модель межотраслевого баланса формулируется в виде пары взаимодвойственных по Янгу задач выпуклой оптимизации: задача распределения ресурсов, которая позволяет найти равновесные межотраслевые потоки при заданном векторе конечного потребления и задачи определения равновесных цен при заданных ценах на первичные ресурсы.

В работе нелинейная модель межотраслевого с производственными функциями 1.-3. идентифицирована на основе агрегированных данных [2] для экономик Германии, Бразилии и США за период с 2008 по 2019 годы. В случае производственной функции CES решение задачи идентификации основано на поиске  $\rho$  как решения задачи глобальной оптимизации, которая сформулирована как минимизация квадратов разности суммарных выпусков, валовой добавленной стоимости и импорта.

Результаты расчетов показали, что наименьшие ошибки при вычислении межотраслевого равновесия наблюдаются в случае производственных функций CES для Германии и США и Кобба-Дугласа для Бразилии. При этом потенциальные возможности замещения ресурсов в Германии оказываются выше, чем в США.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] <https://www.oecd.org> (дата доступа: 11.03.2025)
- [2] Обросова Н. А., Шананин А. А. General Equilibrium Models in Production Networks with Substitution of Inputs // М.: Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, Federal State Budgetary Institution «All-Russian Research Institute of Labor».
- [3] Обросова Н. А., Шананин А. А., Спиридонов А. А. On the comparison of two approaches to intersectoral balance analysis // М.: Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow Institute of Physics and Technology.

## ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

**Фомичев Василий Владимирович, Денисова Надежда Игоревна**

Кафедра НДСиПУ, e-mail: fomichev@cs.msu.ru, denisovani@my.msu.ru

**Введение.** Построение наблюдателей — фундаментальная задача теории управления, объединяющая анализ наблюдаемости, синтез алгоритмов оценки и обеспечение устойчивости [1]. Выбор типа наблюдателя зависит от структуры системы, доступных измерений и требований к точности. Задача построения функционального наблюдателя для линейной системы заключается в оценке определённой линейной комбинации состояния системы, не восстанавливая весь вектор состояния. Это позволяет снизить вычислительную сложность по сравнению с полным наблюдателем.

**Математическая постановка задачи.** Пусть дана линейная стационарная система:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , пара  $A, C$  — во II канонической форме. Требуется построить наблюдатель, оценивающий функционал  $\sigma = Fx$ , где  $F = (f_1, \dots, f_n)$ .

В [2] было показано, что с помощью скалярного наблюдателя можно восстановить функционал

$$\sigma_\lambda = F_\lambda x, \quad F_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}), \quad \lambda < 0.$$

Норма разности

$$\|\sigma - \gamma\sigma_\lambda\| = \|(F - \gamma F_\lambda)x\| \leq \|F - \gamma F_\lambda\| \cdot \|x\| < \varepsilon$$

в случае, если вектор состояния  $x$  ограничен, а  $\|F - \gamma F_\lambda\| \rightarrow \min$ . Таким образом, появляется задача минимизации функционала

$$J_k^n = \|(f_1, \dots, f_n) - \sum_{i=1}^k \gamma_i (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1})\| \quad (1)$$

по  $\gamma_i$  и  $\lambda_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  при произвольном векторе  $F = (f_1, \dots, f_n)$ .

**Утверждение.** При фиксированном  $k < n - 1$  и почти любом наборе  $\lambda_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , существует и единственен набор  $\gamma_i$ , минимизирующий функционал (1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 25-21-00117).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коровин С. К., Фомичев В. В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М. : Физматлит, 2007. 224 с.
- [2] Фомичев В. В., Денисова Н. И. Задачи наблюдения для динамических систем. М. : МАКС Пресс, 2024. 148 с.

## О РАВНОМЕРНОМ РАЗМЕЩЕНИИ АГЕНТОВ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Фомичев Василий Владимирович<sup>1</sup>, Шутова Ксения Юрьевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: fomichev@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: shutovaky@my.msu.ru

Агент — это автономный объект, способный взаимодействовать с другими агентами и окружающей средой по заданным правилам. Равномерное размещение агентов в ограниченной области является одной из фундаментальных задач в теории многоагентных систем. Такие системы находят применение в различных областях, включая моделирование динамики толпы, робототехнику, координацию групп автономных роботов и т.д.

В работе [1] предложен алгоритм равномерного размещения агентов на отрезке. Нами рассматривалась задача распределения  $N$  агентов в двумерной ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  таким образом, чтобы они занимали доступное пространство равномерно. В нашем исследовании [2] приведена постановка задачи размещения агентов на плоскости. Взаимодействие агентов задается через стохастическую матрицу соседств  $A : A_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^N A_{ij} = 1, A = A^T$ . Численные эксперименты показали, что при небольшом количестве агентов и радиусе видимости меньшем самой области  $\Omega$  размещение организуется не по всей целиком области (рис. 1). Агенты группируются, оставляя пустые области по границе. При увеличении области видимости агенты смещаются ближе к границам, но такой способ нежелательно применять, особенно при переносе на реальных роботов, поскольку область видимости ограничена характеристиками датчиков. Однако при увеличении числа агентов агенты заполняют всё пространство. Это связано с тем, что при малом количестве агентов влияние силы отталкивания оказывается недостаточным для эффективного заполнения всей области.

Был рассмотрен альтернативный вариант путем введения статических виртуальных агентов, расположенных по границам области (рис. 2):

$$\begin{cases} x(t+1) = (1 - \beta)x(t) + \beta Ax(t) + F_{att_x} \\ y(t+1) = (1 - \beta)y(t) + \beta Ay(t) + F_{att_y} \end{cases}$$

где  $F_{att_x}, F_{att_y}$  — сила притяжения к ближайшим статическим агентам в проекции на ОХ, ОУ, а величина  $\beta$  — параметр влияния соседей. Такие виртуальные агенты, выделенные красным цветом, создают устойчивый каркас, относительно которого динамические агенты перераспределяются без необходимости использования силы отталкивания, как элемента равномерного размещения. Результаты моделирования показывают, что при таком подходе равномерность размещения агентов сохраняется при любом количестве агентов, поскольку

крайние агенты они ориентируются на заранее определенные контрольные точки. В отличие от первого метода, где агенты могут скапливаться вдоль границ при недостаточном их количестве, здесь динамические агенты заполняют всю область.

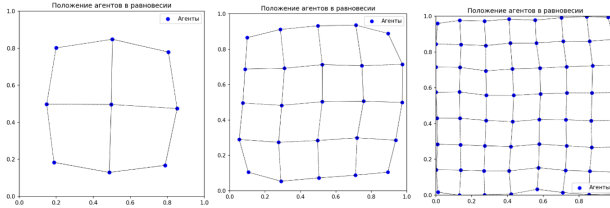


Рис. 1: Размещение агентов в области  $[0, 1] \times [0, 1]$  при подборе коэффициентов влияния соседей  $\beta$  и силы отталкивания  $\gamma$  между ними.

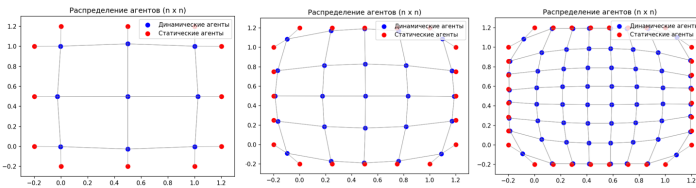


Рис. 2: Размещение динамических агентов в области  $[0, 1] \times [0, 1]$ , заданной через виртуальных агентов.

Работа выполнена при поддержке некоммерческого фонда развития науки и образования «Интеллект» (проект № 1/ГКМУ-2022 от 23.12.2022 г.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Parsegov S. E. Uniform deployment of second-order agents on a line segment / S. E. Parsegov, A. V. Proskurnikov // 6th Intern. Congress on Ultra-Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. 2014. P. 631–636.
- [2] Шутова К. Ю., Фомичев В. В. Алгоритм равномерного размещения агентов в прямоугольнике на основе локальной информации / Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 2. С. 278–282.

## О ПОКАЗАТЕЛЕ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ

**Фурсов Андрей Серафимович, Крылов Павел Александрович**

Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: fursov@cs.msu.ru,  
pavel@leftsystem.ru

Рассматривается задача стабилизации нулевого положения равновесия в заданной прямоугольной окрестности для нелинейной аффинной системы

$$\dot{x} = g(x) + p(x)u, \quad g(0) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где  $g \in C^1(\bar{\Omega})$ , матрица Якоби  $\frac{\partial g}{\partial x}$  липшицева в  $\bar{\Omega}$  с константой  $L_g$ , вектор-функция  $p(x)$  — липшицева с константой  $L_p$  в  $\bar{\Omega}$  ( $\Omega$  — некоторый открытый выпуклый многогранник, содержащий точку  $x = 0$ ),  $u = u(x)$  принадлежит классу кусочно-линейных функций на  $\bar{\Omega}$ . В статьях [1], [2] был предложен подход к решению задачи на основе кусочно-линейной аппроксимации системы (1) вида

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(F). \quad (2)$$

Стабилизирующей регулятор предлагается искать в виде переключаемой обратной связи  $u = -k_\sigma x + w_\sigma$ . Тогда

$$\dot{x} = g(x) - p(x)(k_\sigma x - w_\sigma), \quad x \in \Omega, \quad \sigma \in S(F), \quad (3)$$

$$\dot{x} = (A_\sigma - b_\sigma k_\sigma)x + v_\sigma + b_\sigma w_\sigma, \quad \sigma \in S(F), \quad (4)$$

являются соответствующими замкнутыми системами. Обратим внимание, что замкнутая система (3) является переключаемой. Предлагаемый алгоритм поиска регулятора требует соблюдения равенства графов дискретных состояний систем (3) и (4).

**Определение.** Для каждого переключающего сигнала системы (3) или (4) графом дискретных состояний  $G(\sigma)$  будем называть такой ориентированный граф, вершинами которого являются номера режимов этой системы, а наличие ребра  $i \rightarrow j$  означает существование траектории соответствующей системы, при движении вдоль которой режим  $i$  сменяется режимом  $j$ .

Далее графы дискретных состояний систем (3) и (4) будем обозначать  $G_{g,p}$  и  $G_{A,b}$  соответственно.

**Определение.** Переключаемая система (4) является состоятельной аппроксимацией переключаемой системы (3), если найдётся переключающий сигнал  $\sigma \in S(F)$  такой, что  $G_{A,b}(\sigma) = G_{g,p}(\sigma)$ .

**Определение.** Показателем состоятельности системы (4) будем называть величину

$$\xi = \sup_{\sigma \in S(F)} \xi(\sigma), \quad \xi(\sigma) = \max_{H \in H_\sigma} \min_{i=1, m} \inf_{x \in \Gamma_i(\sigma) \cap \Omega} (\varepsilon_i(x; \sigma, H) - \|e_i(x)\|),$$

где

$$e_i(x) = g(x) + p(x)u(x) - (A_i x + b_i u + v_i), \quad x \in \Omega$$

$$\varepsilon_i(x; \sigma, H) = \min_{j: x \in \Gamma_{ij}(\sigma)} \varepsilon_{ij}(x; \sigma, H), \quad x \in \Gamma_i(\sigma) \cap \Omega,$$

$$\varepsilon_{ij}(x; \sigma, H) = h_{ij} \langle n_{ij}, (A_i - b_i k_i)x + v_i + w_i b_i \rangle,$$

$H_\sigma$  — множество квадратных матриц  $H = [h_{ij}]$  порядка  $m$  таких, что  $h_{ij} = 0$ , если  $\Gamma_{ij} = \emptyset$  для данного  $\sigma$ , а остальные элементы равны  $-1$  или  $1$ ,  $\Gamma_i$  — граница области функционирования режима  $i$ ,  $\Gamma_{ij} = \Gamma_i \cap \Gamma_j$ .

**Теорема.** Пусть показатель состоятельности системы (4), замкнутой допустимым управлением, положителен, тогда система (4) является состоятельной аппроксимацией системы (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-21-0053).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фурсов А. С., Крылов П. А. Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов // Дифференц. уравнения, 2023, Т. 59, №. 4, с. 554-562.
- [2] Фурсов А. С., Крылов П. А. О построении графа дискретных состояний переключаемой аффинной системы // Дифференц. уравнения, 2023, Т. 59, №. 11, с. 1541-1549.

## Consensus Ranking of Universities: A Numerical Experiment

Chen Jiulong, Sergey N. Smirnov

Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, e-mail:  
kowloncen@gmail.com, s.n.smirnov@gmail.com

**Background.** Zanochkin A. Yu., Smirnov S. N., et al. [1] constructed a consensus ranking system for financial institution credit ratings. Their work inspired us to explore the application of consensus ranking methodologies in university rankings. University ranking systems, such as QS, THE, and ARWU, provide diverse assessments of academic institutions. However, these rankings often produce inconsistencies due to variations in methodologies, leading to discrepancies in university evaluations. To address this inconsistency, consensus ranking methods aim to aggregate multiple rankings into a more stable and reliable representation.

**Problems of rating aggregation.** Consider a set of objects  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , and a tuple of  $m$  rating lists  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ , where each  $R_k$  is an ordered list of objects from  $S$ , probably with skips. The goal is to find consensus rating  $S^*$ , that best conforms to initial ratings  $R_k$  [2].

**Methodology.** To achieve these objectives, we evaluate various ranking aggregation techniques, including heuristic methods such as Borda Count, MedRank, and PageRank, as well as optimization-based approaches like the Kemeny-Young method and integer linear programming [3]. Our experimental setup leverages the Mallows model to generate ranking data under controlled conditions, allowing us to systematically test ranking consistency, tie distributions, and completeness [4]. The effectiveness of these aggregation techniques is assessed using ranking similarity metrics, including Kendall's  $\tau$ , Spearman's footrule distance, and Rank-Biased Overlap (RBO), ensuring a comprehensive evaluation of each method's performance [5].

**Results and Findings.** Our experimental results indicate that:

- Consensus ranking methods significantly reduce inconsistencies across multiple ranking lists.
- Optimization-based methods, such as the FAST algorithm [6], outperform heuristic methods in producing stable rankings.
- The impact of data consistency ( $\theta$ ), the number of ranking lists ( $N$ ), and tie ratios ( $r_t$ ) directly influences the effectiveness of consensus ranking models.

These findings demonstrate the robustness of consensus ranking in university evaluation and suggest potential applications in credit rating aggregation.

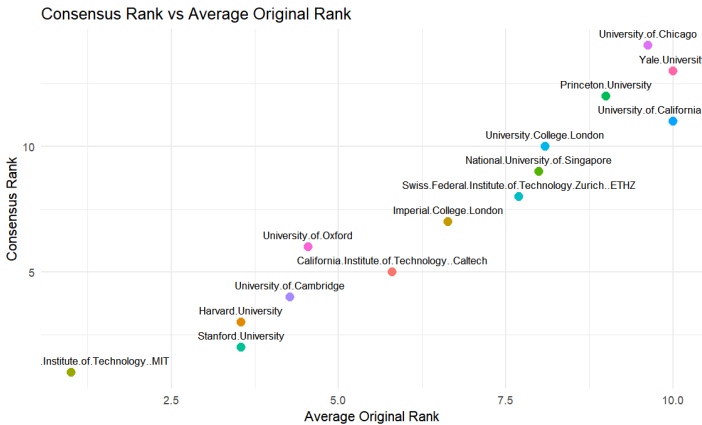


Figure 1: Comparing Consensus Rankings with Original Rankings (2015-2025)



## REFERENCES

- [1] Zanochkin A. Yu., Smirnov S. N., et al. Aggregation of credit ratings as a task of building consensus in the system of expert assessments, *Global Markets and Financial Engineering*. 2017.
- [2] Cook W. D. Distance-based and ad hoc consensus models in ordinal preference ranking. *European Journal of Operational Research*, 2006, 172(2): 369-385.
- [3] Brancotte B., Yang B., Blin G., et al. Rank aggregation with ties: Experiments and analysis. *Proceedings of the VLDB Endowment*, 2015, 8(11): 1202-1213.
- [4] Mallows C. L. Non-null ranking models. *Biometrika*, 1957, 44(1/2): 114-130.
- [5] Webber W., Tague J., Jindal A., et al. Rank-biased overlap: A new similarity measure for ranked lists. *Proceedings of the 14th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 2008: 830-838.
- [6] Amodio S., D'Ambrosio A., Siciliano R. Accurate algorithms for identifying the median ranking when dealing with weak and partial rankings under the Kemeny axiomatic approach. *European Journal of Operational Research*, 2016, 249(2): 667-676.

## ПРИЛОЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА ДЛЯ АНАЛИЗА АГРЕГИРОВАННОЙ СТРУКТУРЫ ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК РОССИЙСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Чебанова Анастасия Максимовна, Обросова Наталия Кирилловна

Кафедра системного анализа, e-mail: s02230551@gse.cs.msu.ru, nobrosova@yandex.ru

В работе рассматривается задача формирования базы входных данных и верификации модифицированной модели межотраслевого баланса, учитывающей замещение производственных факторов, на основе официальных данных системы национальных счетов Росстата [1].

Для анализа межотраслевых потоков и конкурентных равновесных цен применяется модель оптимального распределения ресурсов (1) и ее двойственная по Янгу задача (2), в которых  $X_i^j$  — объем продукции отрасли  $i$ , используемый в отрасли  $j$ ;  $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j) \geq 0$  — первичные ресурсы, которые предполагаются ограниченными;  $F_j(X^j, l^j) = \left( \sum_{i=1}^m \left( \frac{X_i^j}{w_i^j} \right)^{-\rho_j} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{l_k^j}{w_{m+k}^j} \right)^{-\rho_j} \right)^{-\frac{1}{\rho_j}}$  — производственная функция класса CES, отражающая замещение факторов (параметры  $w_i^j, w_{m+k}^j$  определяются по базовому году), а  $F_0(X^0)$  — функция полезности конечных потребителей. Их двойственные аналоги — функция  $q_j(\hat{s}, p)$  и  $q_0(p)$ . В обеих системах  $j = \overline{1, m}$ , где  $m$  — число отраслей.

$$\begin{aligned}
 & F_0(X^0) \rightarrow \max, \\
 & F_j(X^j, l^j) \geq \sum_{i=0}^m X_i^j, \\
 & \sum_{j=1}^m l^j \leq l, \\
 & X^0, \dots, X^m \geq 0, \quad l^1, \dots, l^m \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & q_0(p) \rightarrow \max_p, \\
 & q_j(\hat{s}, p) \geq p_j, \\
 & p \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Задачи (1), (2) для производственных функций класса CES имеют явное аналитическое решение [2]. Проведение прогнозных расчетов по модели требует решения задачи идентификации и верификации параметров производственных функций по статистическим данным таблиц затраты-выпуск (ТЗВ), редко публикуемых в России. Поэтому в работе решена задача формирования базы входных данных модели в рамках двух гипотез, позволяющих восстановить ТЗВ по известным данным таблиц ресурсов и использования (ТРИ): предположение о технологии производства в отрасли (ТЗВ Продукт-Продукт) и постоянство структуры продаж для продуктов (ТЗВ Отрасль-Отрасль) [3].

В рамках исследования верификация проводилась для пяти агрегированных комплексов с общей эластичностью замещения, выделенных по отраслевой принадлежности. Для этих комплексов верификация параметра  $\rho$  формализована в виде задачи глобальной невыпуклой оптимизации — минимизации суммы относительных отклонений расчетных значений выпуска и добавленной стоимости от статистических данных. Вследствие чего численно были получены оптимальные значения  $\rho$  для двух типов таблиц:  $\rho = -0.81$  (ТЗВ Отрасль-Отрасль),  $\rho = -0.77$  (ТЗВ Продукт-Продукт).

Анализ результатов показал, что точность расчетов макроэкономических показателей на основе подхода Продукт-Продукт выше точности расчетов для подхода Отрасль-Отрасль. Это позволяет обоснованно использовать модель и базу данных Продукт-Продукт для прогнозных расчетов межотраслевого баланса России.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Система национальных счетов Росстата.  
<https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts>
- [2] The Nonlinear Model of Intersectoral Linkages of Kazakhstan for Macroeconomic Decision-Making Processes in Sustainable Supply Chain Management / Seyit Kerimkhulle, N.K. Obrosova, A. A. Shaninin, Gulmira Azieva // Sustainability 2022, 14, 14375.
- [3] Miller R. E., Blair P. D. Input-Output Analysis, Foundations and Extensions, Second Edition // Cambridge university press.

# ПОВЫШЕНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

Куприй Роман Михайлович<sup>1</sup>, Жуков Константин Андреевич<sup>2</sup>,  
Краснополяский Борис Иосифович<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: r.kuprii@imec.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: zhukov\_k@cs.msu.ru

<sup>3</sup> Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: krasnopolsky@imec.msu.ru

Поиск решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является трудоемкой задачей при численном моделировании различных физических процессов и явлений. Она занимает значительную часть всего времени вычислений, поэтому эффективная реализация этой подзадачи особенно важна.

Для решения СЛАУ могут применяться различные итерационные численные методы [1]. Они состоят из наборов векторных и матрично-векторных операций. Для ускорения выполнения такого рода операций широко применяются графические ускорители, ввиду их более высокой производительности и пропускной способности памяти в сравнении с центральными процессорами. Однако, для эффективного использования ускорителей необходима адаптация применяемых алгоритмов с учетом особенностей архитектуры.

В настоящей работе исследуется эффективность использования графических ускорителей для ускорения решения СЛАУ при использовании некоторых численных методов, среди которых метод бисопряженных градиентов [3] с предобуславливателем и различными сглаживателями.

Исследуемые методы реализованы в библиотеке численных методов XAMG на GPU и CPU [4, 5]. В докладе будут представлены результаты исследования эффективности использования GPU при решении СЛАУ итерационными численными методами. Для оценки эффективности использовались матрицы из SuiteSparse Matrix Collection [6], а получаемое ускорение вычислений при переходе от CPU к GPU составило в среднем 5 раз.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. : SIAM: 2nd edition, 2003. 520с.
- [2] Baboulin M., Buttari A., Dongarra J. et al. Accelerating scientific computations with mixed precision algorithms // Computer Physics Communications. 2009. T. 180. № 3. С. 2526–2533.
- [3] H.A. van der Vorst BI-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1992. T. 13. № 2. С. 631–644.

- [4] Krasnopolsky B., Medvedev A., XAMG: A library for solving linear systems with multiple right-hand vectors // SoftwareX. 2021. Т. 14, № 13708. С. 486–500.
- [5] Krasnopolsky B., Medvedev A., XAMG: Source code repository [Электронный ресурс] // URL: <https://gitlab.com/xamg/xamg>. (дата обращения: 10.03.2025).
- [6] Davis T. A., Hu Y. The university of Florida sparse matrix collection // ACM Trans. Math. Software. 2011. Т 38, № 1. С. 1–25.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА УМНОЖЕНИЯ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ

Матвеев Алексей Дмитриевич<sup>1</sup>, Жуков Константин Андреевич<sup>2</sup>,  
Краснопольский Борис Иосифович<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: s02230446@gse.cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: zhukov\_k@cs.msu.ru

<sup>3</sup> Институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: krasnopol'sky@imec.msu.ru

Алгебраический многосеточный метод — это итерационный численный метод, предназначенный для решения больших систем линейных алгебраических уравнений [1]. Он состоит из подготовительного этапа и этапа решения [2]. В ходе подготовительного этапа строится иерархия матриц, для чего используется операция произведения разреженных матриц. Из-за этого возникает потребность в алгоритме произведения разреженных матриц, в рамках данной работы считается, что эти матрицы хранятся в формате CSR.

В работе реализуется алгоритм произведения разреженных матриц, производится его распараллеливание и рассматриваются способы дальнейшей оптимизации. В основе алгоритма лежит обход левой матрицы по строкам, в ходе которого каждый её элемент умножается на все элементы строки правой матрицы, соответствующей столбцу умножаемого элемента, с добавлением результатов в соответствующие значения результирующей матрицы [3]. Обход производится дважды: первый раз — для определения количества ненулевых элементов в матрице и выделения памяти, второй — для заполнения матрицы значениями.

Описанный выше алгоритм позволяет обходить обе матрицы по строкам, что удобно для используемого формата хранения разреженных матриц. При распараллеливании матрица разделяется между процессами по полосам (группы подряд идущих строк матрицы). Полосы матрицы, в свою очередь, разбиваются на блоки по столбцам. При этом разбиение по блокам левой матрицы соответствует разбиению по полосам правой, что упрощает процесс пересылки данных.

Проведённые оптимизации кода включают: изменение порядка обхода, введение дополнительного массива, временно хранящего индексы столбцов эле-

ментов во время заполнения результирующей матрицы, использование сжатых блоков, то есть блоков с удалёнными нулевыми строками и столбцами, для уменьшения объёмов пересылок. В докладе будут представлены результаты тестирования этих оптимизаций.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Trottenberg U., Oosterlee C. W., and Schuller A. Multigrid // volume 33 of Texts in Applied Mathematics. Bd. Academic Press, San Diego [u.a.], 2001. ISBN 0-12-701070-X
- [2] Falgout R. D. An Introduction to Algebraic Multigrid // Comput. Sci. Eng. 8 (2006): 24-33
- [3] Bartůněk L. Efficient multiplication of sparse matrices // 2019 [Электронный ресурс]. URL: <https://dspace.cvut.cz/bitstream/handle/10467/83557/F8-BP-2019-Bartunek-Ladislav-thesis.pdf> (дата обращения: 10.03.2025)

## О ФИЛЬТРАЦИИ ТРЁХМЕРНЫХ СКАНИРОВАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЛЕСНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Никольский Илья Михайлович

ф-т ВМК, кафедра СКИ, e-mail: [nikolsky@cs.msu.ru](mailto:nikolsky@cs.msu.ru)

Определение характеристик лесных деревьев (высота, объём зелёной массы, диаметр ствола на уровне груди) имеет большое значение для исследования и управления ресурсами лесных массивов. Внедрение технологии лидарной съёмки позволяет отказаться от трудоёмких ручных замеров с помощью устаревших инструментов и перейти к автоматизированным компьютерным измерениям на трёхмерных изображениях участков леса[1].

Использование машинного обучения при выделении лидарных снимков показало свою эффективность, но требует большого количества размеченных данных. Однако число коллекций трёхмерных сканированных изображений (облаков точек) в свободном доступе невелико. Улучшить ситуацию может применение концепции федеративного обучения [2], которая не предполагает публикации данных, заменяя её обменом обученными на локальных выборках моделями машинного обучения.

На данный момент концепция федеративного обучения при работе с облаками точек используется в основном в области разработки беспилотных транспортных средств. В предлагаемой работе проводится исследование федеративного обучения для коллекции трёхмерных сканов лесных деревьев для сегментации.

В качестве локальных классификаторов использовались решающие деревья, которые затем объединялись в ансамблевый классификатор, определяющий класс точки максимумом голосов составляющих его деревьев. В экспериментах

на размеченных данных коллекции [3] полученный классификатор показал достаточно высокие результаты по метрике F1 достигали. Эти показатели были улучшены путём добавления в ансамбль наивных байесовских классификаторов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Balestra M., Marselis S. et al. LiDAR data fusion to improve forest attribute estimates: a review. // Current Forestry Reports. — 2024. — Vol.10(4) — P.281–297
- [2] Kairouz P. et al. Advances and Open Problems in Federated Learning. //Found. Trends Mach. Learn. — 2021. — Vol.14 (1–2) — P. 1–210.
- [3] Weiser H. et al. Individual tree point clouds and tree measurements from multi-platform laser scanning in German forests // Earth System Science Data. — 2022. — Vol. 14 (7) — P. 2989-3012

## **МОДЕЛИРОВАНИЮ ОСВЕЩЕННОСТИ ПОВЕРХНОСТИ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА СОВРЕМЕННЫХ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ АРХИТЕКТУРАХ**

**Русол Андрей Владимирович<sup>1</sup>, Маркин Игорь Валерьевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики; ГЕОХИ РАН, e-mail: fermata@inbox.ru

<sup>2</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: igormarkin2003@yandex.ru

Моделирование освещенности поверхности космических объектов, таких как астероиды, кометные ядра [1] и искусственные аппараты, является актуальным направлением применения высокопроизводительных вычислительных систем. Полученная при моделировании информация позволяет исследовать неоднородность освещенности и распределения температуры по поверхности объекта, что важно для изучения физических и химических превращений вещества в субповерхностных слоях космических объектов [2], а также для анализа теплового режима и состояния конструкции и бортовой аппаратуры искусственных аппаратов.

В данной работе предложены алгоритмы расчета освещенности 3D-моделей геометрии поверхностей и динамики орбитального движения космических объектов. Модель учитывает суточное вращение объекта, ориентацию его оси вращения относительно Солнца и параметры орбиты. Необходимость использования подробных 3D-моделей поверхностей со сложным рельефом, например, ядра кометы 67P/Чурюмова–Герасименко [3], приводит к экспоненциальному росту объема вычислений.

В качестве целевой платформы решения прикладных задач был выбран Python. Такой подход связан с тем, что основными пользователями предложенных алгоритмов предполагаются астрофизики, космохимики и инженеры, для

которых платформа Python является наиболее удобным инструментарием. При реализации алгоритмов были рассмотрены следующие варианты: обработка данных в явных циклах; использование векторизованных методов библиотек Python; скомпилированная, с использованием `pybind`, библиотека с интерфейсом для Python; реализация на языке C++. Первый вариант оказался, ожидаемо, самым затратным по времени выполнения. Второй вариант, хотя и ускоряет процесс обработки данных почти в 75 раз относительно первого варианта, остается заметно медленнее, чем реализация на C++. Скомпилированная библиотека с интерфейсом для Python показала сравнимую с реализацией на C++ скорость при обработке больших моделей. Использование такой библиотеки позволило ускорить процес обработки моделей почти в 440 относительно первого варианта, и почти в 6 раз относительно второго.

Таким образом, предложенный авторами подход позволяет проводить детальное исследование освещённости сложных поверхностей с использованием возможностей, предоставляемых современными вычислительными архитектурами. Использование высокопроизводительной библиотеки с интерфейсом для Python, позволит специалистам в различных предметных областях, проводить исследования, оставаясь в пределах привычного инструментария платформы Python.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Маров М. Я., Русол А. В., Дорофеева В. А. Трёхмерная модель освещённости кометных ядер: на примере ядра кометы 67P/Чурюмова–Герасименко // Доклады академии наук, 2017, том 474, № 1, с. 41–45.
- [2] Маров М. Я., Русол А. В., Дорофеева В. А. Численное моделирование длительной тепловой эволюции ядер короткопериодических комет: на примере ядра кометы 67P/Чурюмова–Герасименко // Доклады академии наук, 2019, том 484, № 2, с. 150–155.
- [3] 3D представление ядра кометы 67P/Чурюмова-Герасименко, выполненное Европейским космическим агенством по итогам миссии Розетта <https://sci.esa.int/comet-viewer/>

## **РЕАЛИЗАЦИЯ ПСЕВДОСПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА НЕСКОЛЬКИХ ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ**

**Юань Дунлянь, Жуков Константин Андреевич**

Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: s02190800@stud.cs.msu.ru,  
zhukov\_k@cs.msu.ru

Проблема моделирования динамо-генерации магнитного поля электропроводящей жидкостью является актуальной задачей для таких областей как

геофизика, астрофизика и электромагнитные технологии. В качестве практического применения результаты моделирования могут быть использованы как для действующих реакторов [1], так и для проектируемых термоядерных установок с жидкометаллическим теплоносителем [2].

В работе рассматривается кинематическая динамо-задача для несжимаемого трехмерного стационарного потока  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  электропроводящей жидкости [3]:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{b} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  — соленоидальное магнитное поле,  $\eta$  — магнитная диффузия. Поток и поле периодичны с периодом  $2\pi$ .

Численное решение уравнения (1) осуществляется псевдоспектральным методом [4] с применением БПФ из библиотек FFTW [5], P3DFFT [6] (для CPU) и cuFFT (для GPU). Параметры экспериментов:  $\eta = 0.03$ , разрешение 1024 гармоники Фурье, шаг по времени  $\tau = 10^{-4}$ . Поток задан как

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\sqrt{3}} (\sin(x_2) \cos(x_3), \cos(x_1) \sin(x_3), \sin(x_1) \cos(x_2)),$$

генерирующий магнитное поле при  $\eta \leq 0.56$ . Эволюция магнитной энергии согласуется с доминирующим собственным значением оператора магнитной индукции (см. [7]).

Вычислительные эксперименты проводились на суперкомпьютере 270 лет МГУ. Исследования масштабируемости параллельной программы с использованием CPU показали, что один вычислительный узел (128 ядер) даёт ускорение в 17 раз по сравнению с последовательной версией, а 32 узла — в 170 раз. Параллельная реализация на 8 GPU NVIDIA A100 даёт ускорение в 830 раз по сравнению с программой, использующей одно ядро центрального процессора.

Таким образом переход от CPU к GPU позволяет существенно ускорить численное моделирование задач подобного класса, что в свою очередь позволяет за разумное время получать более точные результаты моделирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Alemany A., Marty P., Plunian F., Soto J. Experimental investigation of dynamo effect in the secondary pumps of the fast breeder reactor Superphenix // *Journal of Fluid Mechanics*. 2000. Т. 403. С. 263–276.
- [2] Heinzl A., Hering W., Konys J., Marocco L., Litfin K., Müller G., Pacio J., Schroer C., Stieglitz R., Stoppel L., Weisenburger A., Wetzel T. Liquid metals as efficient high-temperature heat-transport fluids // *Energy Technology*. 2017. Т. 5. С. 1026–1036.
- [3] Moffatt H.K., Dormy E. *Self-Exciting Fluid Dynamos*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press, 2019.



- [4] Peyret R. Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow. Springer, 2002.
- [5] Frigo M., Johnson S.G. The Design and Implementation of FFTW3 // Proceedings of the IEEE. 2005. Т. 93(2). С. 216–231.
- [6] Pekurovsky D. P3DFFT: a framework for parallel computations of Fourier transforms in three dimensions // SIAM Journal on Scientific Computing. 2012. Т. 34, № 4. С. C192–C209.
- [7] Magnetic field generation by pointwise zero-helicity three-dimensional steady flow of an incompressible electrically conducting fluid / A. Rasskazov, R. Chertovskih, V. Zheligovsky // Physical Review E. 2018. Т. 97(4). 043201.

## **РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ ОЦЕНКИ РОБАСТНОСТИ МУЛЬТИМОДАЛЬНЫХ БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ**

**Задорожная Юлия Андреевна<sup>1</sup>, Нутфуллин Булат Маратович<sup>2</sup>, Дмитриев Леонид Вадимович<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра информационной безопасности, e-mail: j.zadorozhnaya2707@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра информационной безопасности, e-mail: bulat15g@gmail.com

<sup>3</sup> Лаборатория открытых информационных технологий, e-mail: leozub@cs.msu.ru

С увеличением объёма данных и вычислительных мощностей мультимодальные большие языковые модели (MLLMs) становятся всё более сложными. Благодаря способности эффективно обрабатывать различные типы информации, они находят широкое применение в автоматизации разнообразных задач. MLLMs активно используются для автоматизации, в том числе в системах реального времени. В настоящее время они уже интегрированы в поисковые системы, виртуальных ассистентов и системы управления беспилотным транспортом.

Однако по мере распространения технологий растёт и актуальность проблемы их безопасности. Модели остаются уязвимыми перед различными типами атак: специальный рисунок на одежде может скрыть человека от системы наблюдения, а скрытые команды в тексте способны вынудить чат-ботов раскрывать конфиденциальные данные. Разработка инструментов для оценки робастности MLLMs позволяет выявлять такие уязвимости и разрабатывать эффективные меры защиты.

В данной работе проведён анализ атак на MLLMs и выбраны состязательные атаки уклонения, направленные на изменение результатов работы модели путём итеративного внесения незаметных возмущений во входные изображения. Для исследования отобраны три типа атак: две целевые атаки (specific string attack [1], exclusive targeted adversarial attack [2]) и одна нецелевая атака [3]. Эти методы позволяют комплексно оценить робастность модели к различным видам вредоносных воздействий на изображение.

Эффективность атак для всех задач измерялась по двум ключевым метрикам: ASR и расстояние Левенштейна. По результатам обзора определены три основные задачи с соответствующими метриками и датасетами для интеграции в инструмент тестирования робастности MLLM:

- **Image Captioning** — задача генерации текстовых описаний изображений, оценивается метриками BLEU-4 и CIDEr, характеризующими семантическое соответствие между сгенерированными и эталонными описаниями. Тестирование осуществляется на датасетах Flickr30k и COCO Captions.
- **Referring Expression Comprehension** — задача локализации объектов на изображении по текстовому описанию, оценивается метрикой IoU@0.5 на датасете Flickr30k, определяющей точность идентификации пространственных границ объектов.
- **Visual Question Answering** — задача ответов на вопросы по изображениям, оценивается метрикой VQA-Accuracy на датасете VQAv2, характеризующей семантическую точность ответов на разноплановые вопросы.

В результате исследования был создан инструмент с модульной архитектурой для оценки робастности MLLM, упрощающий интеграцию новых моделей и состязательных атак, применяемых к трём выбранным задачам. Эксперименты показали, что новые модели не становятся более защищёнными: минимальные изменения в изображениях вызывали существенные отклонения в выводах, особенно по метрикам BLEU-4 и VQA-Accuracy в задачах Image Captioning и VQA.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Image hijacks: Adversarial images can control generative models at runtime / L. Bailey, E. Ong, S. Russell, S. Emmons // arXiv:2309.00236, 2023.
- [2] Adversarial Robustness for Visual Grounding of Multimodal Large Language Models / K. Gao, Y. Bai, J. Bai, Y. Yang, S. Xia // arXiv:2405.09981, 2024.
- [3] Schlarman C., Hein M. On the adversarial robustness of multi-modal foundation models // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV) Workshops. 2023. P. 3677-3685.

## **ПОВЫШЕНИЕ РОБАСТНОСТИ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ МОШЕННИЧЕСТВА В БАНКОВСКИХ ТРАНЗАКЦИЯХ**

**Ильющин Евгений Альбинович<sup>1</sup>, Ломоносова Вероника Евгеньевна<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра информационной безопасности, e-mail: ilyushinea@my.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра информационной безопасности, e-mail: ve.lomonosova@gmail.com

По отчету Центробанка [1], в 2023 году объем операций без согласия клиентов увеличился по сравнению с 2022 годом на 11,48% на фоне роста объема денежных переводов с использованием карт и составил до 136,38 триллиона рублей. Фрод принято определять как незаконные действия, направленные на получение финансовой выгоды, включая использование украденных карт, их клонирование и проведение фиктивных транзакций. Системы защиты от мошенничества, или системы антифрода, способны распознавать подобные схемы и отправлять транзакции на дополнительную проверку.

В условиях растущего объема транзакций и сложности мошеннических схем, традиционные методы детекции сталкиваются с ограничениями в эффективности и своевременности выявления угроз [2]. Машинное обучение, как передовой инструмент анализа больших данных, предлагает разнообразные алгоритмы, способные выявлять скрытые закономерности и аномалии в транзакциях. Тем не менее, в дополнение к эффективности методов, критически важным аспектом является их устойчивая работа в условиях изменяющихся данных, характерных для мошеннической деятельности [3]. Такая устойчивость называется робастностью моделей машинного обучения и становится ключевым фактором для поддержания надежности систем в долгосрочной перспективе.

Целью данной работы является разработка робастных методов обнаружения фродовых транзакций. В качестве наборов данных для этого используются датасеты CCFA и IEEE-fraud-detection, содержащие в себе размеченные реальные банковские транзакции. В качестве методов выбраны методы машинного обучения DT, LR, RF, SVM, Gradient Boosting [4]. В результате разработки данные методы, в совокупности с методами борьбы с дисбалансом классов SMOTE и Adasyn, способны показать качество 0.99 AUC-ROC и 0.99 Average Precision. В результате получено, что методы не являются робастными после применения black-box атак HopSkipJump, Boundary и ZOO и их качество опускается от 0.7 ROC-AUC и 0.67 Average Precision. После применения таких подходов, как состязательное обучение и устранение шума в данных с помощью фильтра Калмана, экспоненциального сглаживания и PCA удалось значительно повысить устойчивость моделей к состязательным атакам и повысить качество на состязательных экземплярах до 0.8 ROC-AUC и 0.78 Average Precision.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций // Банк России: – 2014. – URL: [https://cbr.ru/analytics/ib/operations\\_survey/2023/](https://cbr.ru/analytics/ib/operations_survey/2023/) (дата публикации: 13.02.2024)
- [2] He R. et al. An unsupervised neural attention model for aspect extraction // Proceedings of the 55th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers). – 2017. – С. 388-397.
- [3] Mikolov T. et al. Distributed representations of words and phrases and their compositionality // Advances in neural information processing systems. – 2013. – Т. 26.
- [4] Alarfaj F. K. et al. Credit card fraud detection using state-of-the-art machine learning and deep learning algorithms // Ieee Access. – 2022. – Т. 10. – С. 39700-39715.

## ПОИСК БЛИЖАЙШЕГО ВЕКТОРА В ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕШЕТКАХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КВАНТОВОГО ОТЖИГА

Лысаков Иван Вячеславович<sup>1</sup>, Применко Эдуард Андреевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра информационной безопасности ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: lysakoviv@my.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра информационной безопасности ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: primenko@inbox.ru

Исследуется сведение задач поиска ближайшего вектора (closest vector problem, CVP) и декодирования с ограниченным расстоянием (bounded distance decoding, BDD) из теории целочисленных решеток к задаче Изинга [3]. Последняя предполагает нахождение минимума функционала

$$I(\mathbf{s}) = \sum_{p=1}^n h_p s_p + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n J_{i,j} s_i s_j$$

где  $h_p \in \mathbb{R}$ ,  $p = \overline{1, n}$ ,  $J_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $i < j \leq n$  над множеством переменных  $s_k \in \{-1, 1\}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Параметр  $n$ , задающий количество переменных в функционале, играет важную роль в определении сложностных характеристик алгоритма. В случае квантового адиабатического вычислителя [1] он устанавливает количество кубитов, необходимых для проведения вычислений.

Применение адиабатического вычислителя для поиска ближайшего вектора рассматривалось в [2], в которой установлено, что для нахождения решения достаточно  $O(n^2 \cdot (\log n + \log b))$  кубитов, где  $b$  – максимальный по модулю коэффициент в базе решетки. В [4] была рассмотрена возможность решения задачи BDD с использованием аналогичного вычислителя, работающего с  $O(n \log n)$  кубитов для специального класса решеток.

В данной работе доказаны оценки на количество кубитов, достаточных для решения задач CVP и BDD в произвольной решетке  $\mathcal{L}$ .

**Теорема 1.** Пусть решетка  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Z}^n$  размерности  $n$  задана LLL-редуцированным базисом  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ . Тогда ближайший вектор решетки к точке  $\mathbf{t}$ , не принадлежащей  $\mathcal{L}$ , может быть найден на квантовом адиабатическом вычислителе, работающим с

$$\left(\frac{1}{2} + \log 3\right) n^2 + \frac{1}{2} n \log n + n \log \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \|\mathbf{b}_i\|}{\|\mathbf{b}_1\|} - (1 + \log 3) \cdot n$$

кубитами. При этом задача BDD относительно точки  $\mathbf{t}$  при  $0 < \gamma < 1/2$  может быть решена с использованием

$$\left(\frac{1}{2} + \log 3\right) n^2 - (1 + \log 3) n$$

кубитов.

На основе теоремы 1 нами была выведена оценка, устанавливающая достаточность наличия адиабатического вычислителя с  $O(M^2)$  кубитами для нахождения ближайшего вектора в любой решетке  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Z}^n$  размерности  $n$ , где  $M = \max \{n, \log(\max_{1 \leq i, j \leq n} |b_{i,j}|)\}$ ,  $b_{i,j}$  – коэффициенты LLL-редуцированного базиса решетки  $B$ . Данная оценка улучшает результат, полученный в [2] и обобщает подход, предложенный в [4], на произвольный класс решеток.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Albash T., Lidar D. A. Adiabatic quantum computation // Rev. Mod. Phys. 2018. Vol. 90. P. 015002.
- [2] Canale E., Qureshi C., Viola A. Qubo model for the Closest Vector Problem // arXiv:2304.03616. 2023.
- [3] Kadowaki T., Nishimori H. Quantum annealing in the transverse Ising model // Physical Review E. 1998. Vol. 58, no. 5. P. 5355–5363.
- [4] Lysakov I. V. Solving some cryptanalytic problems for lattice-based cryptosystems with quantum annealing method // Матем. вопр. криптогр. 2023. Т. 14. С. 111–122.

## ИЗВЛЕЧЕНИЕ ШАБЛОНОВ НТТР—ЗАПРОСОВ ИЗ МОБИЛЬНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ МЕТОДОМ СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Ситников Андрей Васильевич, Петухов Андрей Александрович**

Кафедра информационной безопасности, e-mail: s02230507@gse.cs.msu.ru,  
petand@seclab.cs.msu.ru

Анализ защищенности методом «черного ящика» является необходимой мерой по обеспечению защищенности онлайн приложений. Одной из составляющих анализа защищенности методом «черного ящика» является сбор информации о целевом приложении: URL—адресов, методов запросов к ним и

входных параметров, форматов тел запросов и т.п. [1]. Для современных онлайн–приложений в качестве клиента часто выступают мобильные приложения. Таким образом, для сбора информации о серверной части онлайн–приложений требуется провести анализ клиентской части — то есть, мобильного приложения, являющегося источником клиент–серверного взаимодействия. Для автоматизации сбора такой информации могут применяться методы динамического или статического анализа; к сожалению, на данный момент не существует полностью автоматизированных инструментов для анализа мобильных приложений с целью извлечения информации о клиент–серверном взаимодействии. В данной работе рассмотрена применимость статического анализа к задаче извлечения шаблонов HTTP–запросов из мобильных приложений для ОС Android.

**Android SDK и Retrofit.** В качестве цели анализатора были выбраны Android SDK и Retrofit. Фреймворк Android SDK является самым популярным для разработки на момент написания тезисов [2]. Данный фреймворк использует Java как базовый язык программирования для реализации приложений. В качестве целевой библиотеки для HTTP–взаимодействия был выбран Retrofit — самая популярная библиотека в используемом фреймворке [3].

**SootUp.** Основой для реализованного анализатора стал фреймворк анализа кода для приложений на Java — SootUp [4]. Данный фреймворк предоставляет обширный набор готовых примитивов и методов для статического анализа: от построения графа вызовов приложения до готовых реализаций алгоритмов статического анализа, например, анализа достижимых определений.

**Алгоритм анализа.** Особенностью приложений, использующих библиотеку Retrofit для отправки запросов, является декларативный способ описания элементов конструируемого запроса с помощью аннотаций. Таким образом, алгоритм основан на извлечении аннотаций из исходного кода и проведении дополнительного статического анализа контекстов формирования HTTP–запросов в коде мобильного приложения.

**Оценка качества.** Для экспериментального исследования были выбраны приложения из топ–100 российского Google Play. Оценка применимости анализатора производилась в сравнении с результатами ручного сбора поверхности атаки и показала следующие результаты: средний показатель отношения найденных анализатором запросов ко всем запросам, извлеченным вручную, составляет 67%, при этом процент полностью найденных частей запроса Query-параметров составляет 66%, тела запроса — 75%, однако для заголовков запросов это соотношение составляет всего лишь 8% (заголовки при этом редко являются частью поверхности атаки приложения). Данный результат подтверждает применимость анализатора для извлечения шаблонов HTTP–запросов из мобильных приложений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] YaoWen Huang, Shih-Kun Huang, Tsung-Po Lin, Chung-Hung Tsai. Web application security assessment by fault injection and behavior monitoring // Proceedings of the 12th International Conference on World Wide Web. — WWW '03. — New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2003. — P. 148–159. <https://doi.org/10.1145/775152.775174>.
- [2] AppFigures. Top Development SDKs Installed in iOS & Android Apps and Games · SDK Intelligence by Appfigures / AppFigures. — 2024. <https://appfigures.com/top-sdks/development/all>.
- [3] AppBrain|Statistics. Android network libraries / AppBrain|Statistics. — 2024. <https://www.appbrain.com/stats/libraries/tag/network/android-network-libraries>.
- [4] Kadiray Karakaya, Stefan Schott, Jonas Klauke et al. SootUp: A Redesign of the Soot Static Analysis Framework // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems / Ed. by Bernd Finkbeiner, Laura Kovács. — Cham: Springer Nature Switzerland, 2024. — Pp. 229–247.

## О СВЯЗИ ЗАДАЧИ ПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ КОДОВ И ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОДПРОСТРАНСТВ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Чижов Иван Владимирович

Кафедра информационной безопасности, e-mail: [ichizhov@cs.msu.ru](mailto:ichizhov@cs.msu.ru)

Задача перестановочной эквивалентности линейных кодов является одной из центральных вычислительно трудных проблем современной теории алгебраического кодирования. Впервые систематическое изучение ее вычислительной сложности было начато в 1997 году с работы [1]. Эта задача наряду с задачей декодирования, лежит в основе некоторых вариантов криптосистемы Мак-Элиса, старейшей теоретико-кодовой постквантовой криптосистемы, предложенной в 1978 году Р.Дж.Мак-Элисом [2].

Если  $\mathbb{F}_q$  — конечное поле порядка  $q$  и  $\mathbb{F}_q^{k \times n}$  — множество  $(k \times n)$ -матриц над полем  $\mathbb{F}_q$ , то задачей о перестановочной эквивалентности матриц  $G_1 \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$  и  $G_2 \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$  будем называть следующую проблему  $\text{PEC}(G_1, G_2)$ . Требуется выяснить существует ли такая невырожденная  $(k \times k)$ -матрица  $A$  над полем  $\mathbb{F}_q$  и такая подстановка  $\sigma \in S_n$ , что выполняется равенство  $A \cdot G_1 = G_2 \cdot \sigma$ , здесь  $\sigma$  — перестановочная  $(n \times n)$ -матрица соответствующая  $\sigma$ . При этом если такие  $A$  и  $\sigma$  существуют, то необходимо их найти.

Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — конечные множества квадратичных форм над полем  $\mathbb{F}_q$  от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Тогда задачей линейной эквивалентности (или

просто изоморфизма)  $G_1$  и  $G_2$  будем называть следующую проблему  $\text{IQ}(G_1, G_2)$ . Требуется выяснить существует ли такая невырожденная  $(k \times k)$ -матрица  $A$ , что для любой квадратичной формы  $g(x_1, x_2, \dots, x_k) \in G_1$  квадратичная форма  $g(A \cdot x^\top)$  принадлежит линейной оболочке множества  $G_2$  над  $\mathbb{F}_q$ . Здесь  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  — вектор формальных переменных.

В работе предлагается алгоритм решения задачи  $\text{PEC}(G_1, G_2)$  с использованием алгоритма  $A_{\text{IQ}}$  для решения задачи  $\text{IQ}(G_1, G_2)$ . При этом в качестве  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ , выбирается базис пространства квадратичных форм, которые обращаются в ноль на столбцах матрицы  $G_i$  (т.е.  $G_i$  — базис пространства квадратичных отношений, см. [3]). Обсуждается корректность этого алгоритма в случае, когда хотя бы для одного  $i = 1, 2$  столбцы  $G_i$  исчерпывают множество нулей форм из  $G_i$ . Кроме того, оценивается вероятность корректной работы алгоритма в общем случае. Предлагается новое моделирование задачи  $\text{PEC}$  системой квадратных уравнений над  $\mathbb{F}_q$ . Построенное моделирование может быть использовано для решения задачи  $\text{PEC}$  с помощью базисов Гребнера или решателей задачи выполнимости КНФ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Petrank E. R., Ron M. Is Code Equivalence Easy to Decide? // IEEE Transactions on Information Theory. 1997. V. 43, N 5, P. 1602—1604.
- [2] McEliece R. J. A Public-Key Cryptosystem Based on Algebraic Coding Theory // JPL DSN Progress Report. 1978. V. 44, P. 123—125.
- [3] A New Approach Based on Quadratic Forms to Attack the McEliece Cryptosystem / A. Couvreur, R. Mora, J.-P. Tillich //arXiv. 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.10294>

## РОЛЬ ВНЕДРЕНИЯ ТЕСТОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ЗАДАЧЕ ИСПРАВЛЕНИЯ ОШИБОК В ИСХОДНОМ КОДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Абрахманова Валерия Тимуровна, Корухова Людмила Сергеевна<sup>1</sup>,  
Сорокин Константин Сергеевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: sp@cs.msu.ru, s02230572@gse.cs.msu.ru

<sup>2</sup> ИСП РАН, e-mail: ksorokin@ispras.ru

Автоматизация процессов локализации и поиска ошибок в исходном коде особенно актуальна с ростом объема промышленных программных продуктов. Для решения этой проблемы представляется интересным подход, основанный на использовании больших языковых моделей, способных не только анализировать естественный язык, но и работать с программным кодом [1]. Одним из эталонных бенчмарков для оценки применимости больших языковых моделей в задачах, связанных с кодом, является HumanEvalPack [2], который содержит



Стратегия	<i>Nous-Hermes-2-Mixtral-8x7B-DPO</i>	<i>Qwen2.5-Coder-32B-Instruct</i>	<i>DeepSeek-R1-Distill-Qwen</i>
<i>default-fix</i>	61/164 (37,19%)	101/164 (61,58%)	131/164 (79,88%)
<i>fix-with-rollback</i>	77/164 (46,95%)	120/164 (73,17%)	142/164 (86,58%)
<i>fix-with-feedback</i>	90/164 (54,87%)	125/164 (76,22%)	144/164 (87,80%)

Таблица 4: Результаты экспериментов с HumanEvalFix, язык программирования Python

набор данных HumanEvalFix с задачами исправления кода. Задача модели — обнаружить и исправить ошибки так, чтобы проходили все модульные тесты для каждого конкретного примера.

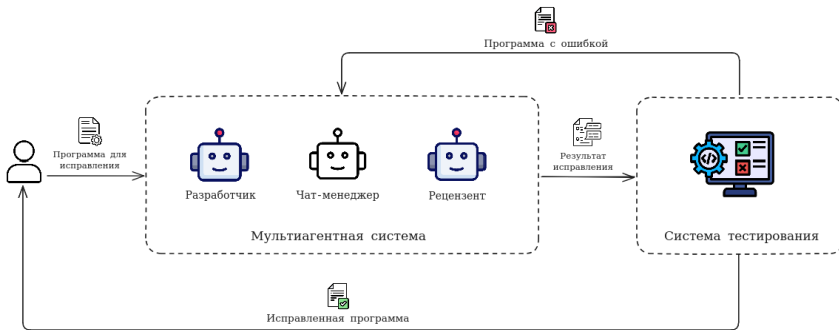


Рис. 1: Общая схема итеративного исправления ошибки

Был реализован процесс агентного взаимодействия [3] разработчика и рецензента исходного кода. Выбраны две основные стратегии для решения задачи исправления ошибок в исходном коде: *fix-with-rollback* и *fix-with-feedback*. В первом случае пользователь предоставляет большой языковой модели исходный код, содержащий ошибку, модульные тесты, а также результат выполнения тестов. Во втором случае этот процесс становится итеративным: после того, как работа по исправлению ошибки завершена, запускаются модульные тесты для изменённого кода, и если хотя бы один из тестов завершился с ошибкой, процесс исправления запускается на обновлённых данных. Итеративный процесс исправления кода продолжается до тех пор, пока ошибки не будут исправлены, либо пока не будет достигнуто максимальное число попыток (см. Рисунок 1).

При таком подходе добавление результатов тестов на первой итерации исправления ошибок в коде позволяет добиться улучшения качества на 6-11%,

а повторное исполнение этого процесса (зацикливание) повышает качество на 8-17%.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Automated Repair of Programs from Large Language Models / Z. Fan, X. Gao, M. Mirchev, A. Roychoudhury, S. H. Tan // arXiv preprint arXiv:2205.10583, 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2205.10583>.
- [2] OctoPack: Instruction Tuning Code Large Language Models / N. Muennighoff, Q. Liu, A. Zebaze, Q. Zheng, B. Hui, T. Y. Zhuo, S. Singh, X. Tang, L. von Werra, S. Longpre // arXiv preprint arXiv:2308.07124, 2023.
- [3] Talebirad Y., Nadiri A. Multi-Agent Collaboration: Harnessing the Power of Intelligent LLM Agents // arXiv preprint arXiv:2306.03314, 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2306.03314>.

# ОПТИМИЗАЦИЯ ИНСТРУМЕНТА АВТОМАТИЧЕСКОЙ БАЛАНСИРОВКИ ВИРТУАЛЬНЫХ МАШИН МЕЖДУ РАЗНЫМИ СЕРВЕРАМИ

Аветисян Арутюн Ишханович, Калинин Григорий Михайлович<sup>1</sup>,  
Богомолов Игорь Владимирович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: arut@ispras.ru, g.kalinin@ispras.ru

<sup>2</sup> Институт системного программирования РАН им В. П. Иванникова, e-mail: bogomolov@ispras.ru

Облачные вычисления— модель обеспечения удобного сетевого доступа по требованию к некоторому общему фонду конфигурируемых вычислительных ресурсов (сетям передачи данных, серверам, устройствам хранения данных, приложениям и/или сервисам), которые могут быть автоматически предоставлены и освобождены по запросу с минимальными эксплуатационными затратами [1]. В рамках предоставления ресурсов по модели «инфраструктура как услуга» центральным понятием является виртуальная машина. Виртуальная машина в том числе определяет совокупность потребляемых ресурсов. При этом ресурсы предоставляются физическими серверами, объединёнными в кластер при помощи той или иной облачной платформы.

В результате перед облачными платформами стоит задача планирования и размещения виртуальных машин на физических узлах(хостах) кластера. Данная задача успешно решается при помощи планировщиков во время запуска виртуальной машины. Однако, таким образом решается только задача первоначального размещения. В силу того, что кластер — динамично меняющаяся система, которая нуждается в обслуживании, возможно возникновение следующих ситуаций:

- необходимость вывести хост из состава кластера в связи с плановым обслуживанием, для уменьшения энергопотребления и т. п.

— недостаток ресурсов на одном хосте кластера при наличии свободных ресурсов суммарно по всем узлам кластера

Эти проблемы ставят перед современным научным сообществом задачу перераспределения виртуальных машин по имеющимся хостам [2].

В работе рассматривается следующая задача:

Имеется  $N$  одинаковых хостов с характеристиками  $c_1, \dots, c_n$ . Имеется  $m$  виртуальных машин с характеристиками  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ ,  $\bar{v}_k = (v_{k1}, \dots, v_{kn})$ ,  $k = \overline{1, m}$ . Имеется начальное распределение виртуальных машин  $\bar{x}^0 = x_1^0, \dots, x_m^0$  и матрица штрафов за перемещение  $S = (s_{ij})_{mN}$ . Необходимо найти  $\bar{x} \in \{1, \dots, N\}^m$ , минимизирующий векторную функцию  $f(\bar{x}) = \{f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})\}$ .

Для данной задачи в работе представлено доказательство того, что она является NP-трудной, а также представлен алгоритм приближённого решения задачи для различных  $f_i(\bar{x})$  при использовании различных обобщённых критериев [3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] The NIST Definition of Cloud Computing. URL: <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/legacy/sp/nistspecialpublication800-145.pdf>(дата обращения 09.03.2025)
- [2] Соловьев В. П., Удовиченко А. О. Метод планирования размещения группы виртуальных машин с перераспределением ресурсов // Программные продукты и системы. 2012. №1. С. 134-138. ISSN 2311-2735
- [3] Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 256 с. ISBN 978-5-9221-0812-6

## СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЯЗЫКА PYTHON С РАЗРЕШЕНИЕМ КОСВЕННЫХ ВЫЗОВОВ

Белеванцев Андрей Андреевич, Галустов Артемий Львович<sup>1</sup>, Бородин Алексей Евгеньевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования ВМК МГУ, ИСП РАН, e-mail: abel@ispras.ru, artemiy.galustov@ispras.ru

<sup>2</sup> ИСП РАН, e-mail: alexey\_bor@ispras.ru

Язык программирования Python — один из самых популярных языков последнего десятилетия [1]. При разработке программ на нем широко применяются инструменты статического анализа, такие как MyPy, Bandit, PyLint и Pysa. Их можно разделить на две группы: анализаторы на основе АСД (например, Bandit и PyLint) и анализаторы, использующие аннотации типов (например, MyPy и Pysa). Первый подход может находить относительно простые типы ошибок, но, как правило, ограничивается внутривидеометрическим анализом. Второй подход способен находить ошибки в гораздо более сложных ситуациях, но его

применимость ограничена редкостью применения аннотаций типов в проектах (менее 4% проектов с открытым исходным кодом [2]).

Наш анализатор Python является частью семейства инструментов Svase [3]. Сначала исходный код на языке Python компилируется в промежуточное представление SvaseIR, затем, используя алгоритм анализа косвенных вызовов [4], восстанавливается граф вызовов, и на основе этих данных выполняется потоково-чувствительный межпроцедурный анализ на основе резюме [5]. Для построения SvaseIR используется байт-код CPython, предоставляемый модулем стандартной библиотеки dis. В ходе трансляции байт-код приводится к SSA-форме, трансформируется для анализа исключений try-excerpt и пополняется метаинформацией для анализа косвенных вызовов. Этот анализ, в свою очередь, дополнен поддержкой модели функционального и объектно-ориентированного программирования в Python. Реализована поддержка захвата переменных при объявлении функций, анализ атрибутов объектов (которые функционально отличаются от полей в статически типизированных языках) и специальная логика для обработки создания экземпляров классов. Ключевым результатом работы стала возможность использовать существующие детекторы Svase без значительной доработки.

Для оценки результатов был проанализирован набор проектов с открытым исходным кодом суммарным объемом более 4 миллионов строк кода. Анализ имеет высокую производительность: самый большой из проектов, rutorch (1.3 миллиона строк кода), обрабатывается за 190 секунд. Детекторы, применимые к Python, показали высокую долю истинных срабатываний (более 65%).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] TIOBE index: [сайт] - 2025 - URL <https://www.tiobe.com/tiobe-index/> - (дата обращения: 01.03.2025). - Текст: электронный.
- [2] Rak-Amnouchkit I. et al. Python 3 types in the wild: a tale of two type systems // Proceedings of the 16th ACM SIGPLAN International Symposium on Dynamic Languages. 2020. С. 57-70.
- [3] Иванников В. П., Белеванцев А. А., Бородин А. Е., Игнатъев В. Н., Журихин Д. М., Аветисян А. И., Леонов М. И. Статический анализатор Svase для поиска дефектов в исходном коде программ // Труды ИСП РАН. 2014. №1.
- [4] Galustov A., Borodin A., Belevantsev A. Devirtualization for static analysis with low level intermediate representation // Ivannikov Institute for System Programming of the RAS, 2022.
- [5] Borodin A. E., Dudina I. A. Intraprocedural Analysis Based on Symbolic Execution for Bug Detection // Programming and Computer Software. 2021. Т. 47. №. 8. С. 858-865.

## СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ СОБРАННЫЕ ПРИ ФАЗЗИНГЕ ДАННЫЕ

Гайсарян Сергей Суменович, Акопян Артур Арамович<sup>1</sup>, Курмангалеев Шамиль Фаимович, Санкина Полина Андреевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования ВМК МГУ, e-mail: ssg@ispras.ru, aa.akopyan@ispras.ru

<sup>2</sup> ИСП РАН, e-mail: kursh@ispras.ru, p.sankina@ispras.ru

У статического анализа бинарного кода есть ряд проблем - это ложные срабатывания, то есть ошибочное определение дефекта анализатором, и неполнота - ситуация, при которой анализатор не находит все дефекты, присутствующие в программе. Одна из основных причин ложных срабатываний - это учет заведомо нереализуемых путей исполнения во время анализа программы, а причина неполноты - наоборот, пропуск некоторых путей, которые могут возникнуть при исполнении программы. Таким образом, нужно подобрать баланс между полнотой и точностью для достижения наилучшего результата.

Если попытаться подобрать такое приближение, которое обязательно покрывало бы все потенциально возможные пути, то вместе с ними будут учитываться нереализуемые пути, что в результате приводит к слишком высокому уровню ложных срабатываний. Поэтому в некоторых случаях можно учитывать только некоторые интересующие нас пути, ориентируясь, например, на запуск динамических инструментов на заданном тестовом наборе, и находить на этих путях дефекты.

Хороший пример рассмотренной ситуации это восстановление вычисляемых вызовов. Вычисляемый вызов - это такой вызов, при котором адрес вызываемой функции вычисляется в процессе выполнения и может быть неизвестен в процессе компиляции. Статически в бинарном коде восстановить такие вызовы с достаточной точностью сложно из-за отсутствия типов и неправильного учета условий.

**Описание метода.** В рамках исследования был разработан и реализован в Binside [1] метод, в котором для восстановления виртуальных вызовов используются собираемые с помощью фаззера [2] данные. Сначала статический анализатор проводит предварительный анализ, в рамках которого устанавливаются точки с вычисляемыми вызовами и формируются команды для отладчика для получения состояния регистров и памяти. Далее запускается фаззер на исследуемом бинарном файле на некотором тестовом наборе входных данных. При каждом запуске фаззер использует отладчик для сбора необходимых данных из состояния регистров и памяти. После прохода достаточного количества путей собранные данные передаются в статический анализатор, который в свою очередь восстанавливает вычисляемые вызовы и проводит поиск дефектов. Обратим внимание, что фаззер тут нужен только для автоматической генера-

ции входных данных. При наличии тестового набора достаточного размера использование фаззера не обязательно.

Рассмотрим метод на примере `bftpd` [3] версии 1.0.12, где содержится дефект переполнения буфера в обработке команды `LIST`. Адрес функции-обработчика команды вычисляется в зависимости от строки, переданной в пакете. Статически восстановить этот адрес невозможно, а фаззер, хотя и использует команду `LIST`, не способен подобрать аргументы для поиска дефекта. Однако используя предложенный метод, с помощью динамики получается восстановить вызов функции-обработчика команды `LIST` и установить факт передачи туда данных от пользователя, и далее статикой обнаружить дефект с переполнением буфера.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Исследование и разработка межпроцедурных алгоритмов поиска дефектов в исполняемом коде программ / Г. С. Иванов, П. М. Пальчиков, А. Ю. Тарасов, Г. С. Акимов, А. К. Аслаян, В. Г. Варданян, М. С. Арутюнян, Г. С. Керопян // Труды Института системного программирования РАН. – 2019. – Т. 31, – № 6. – С. 89-98.
- [2] ИСП РАН «CRUSHER» [Электронный ресурс] // Институт системного программирования РАН. - URL: <https://www.ispras.ru/technologies/crusher/>
- [3] Bftpd [Электронный ресурс] // SourceForge. - URL: <https://bftpd.sourceforge.net/>

## МЕТОДЫ ГЕНЕРАЦИИ СЕТЕВЫХ СЕССИЙ ДЛЯ ФАЗЗИНГА ПРОТОКОЛОВ

**Гайсарян Сергей Суменович, Гайфутдинова Фарида Хамитовна<sup>1</sup>,  
Акользин Виталий Владимирович, Курмангалеев Шамиль Фаимович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования ВМК МГУ, e-mail: [ssg@ispras.ru](mailto:ssg@ispras.ru), [farida.gaif@ispras.ru](mailto:farida.gaif@ispras.ru)

<sup>2</sup> Институт системного программирования им. В. П. Иванникова, e-mail: [vva1994@ispras.ru](mailto:vva1994@ispras.ru), [kursh@ispras.ru](mailto:kursh@ispras.ru)

Тестирование программного обеспечения является критически важным процессом для обеспечения качества и безопасности программных систем. Одним из наиболее эффективных методов автоматизированного динамического анализа программ является фаззинг [1]. Современный фаззинг сетевых протоколов требует подходов к генерации сетевых сессий, обеспечивающих высокое покрытие кода серверных приложений. В данной работе предлагаются методы генерации сетевых сессий, основанные на мутациях программного кода и данных клиентского приложения при взаимодействии с сервером. В качестве фаззера используется инструмент ИСП Fuzzer [2].

Первый метод основан на автоматизированной мутации клиентского кода, при этом пользователь самостоятельно выбирает методы, которые будут измене-

ны. Такой подход обеспечивает высокую вариативность генерируемых сетевых сессий и усиливает фаззинг. В основе механизма лежит объектная мутация, реализованная в виде функции—обертки над методами в исходном клиенте, предполагающая внесение изменений в код клиента, что позволяет заменять вызов одного метода на цепочку аналогичных. Для этого используются методы машинного обучения, позволяющие группировать методы в «дружественные классы» по их сигнатурам и сходству в названиях. Дополнительно применяются буферные мутации, изменяющие аргументы вызовов. Схемы исходного и модифицированного клиентов показаны на рисунке 1.

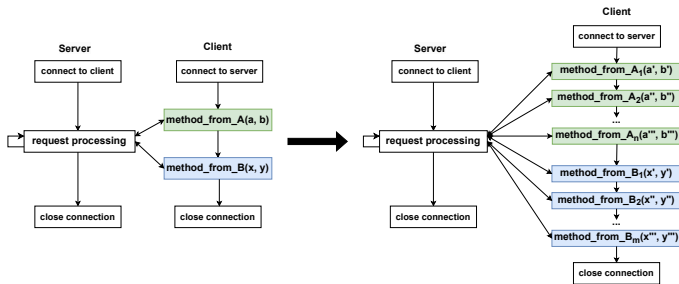


Рис. 1: Исходный и модифицированный клиенты.

Во второй части доклада рассматриваются мутации данных, передаваемых в ходе сетевых сессий, а также автоматизация процесса поиска мест в клиентском коде, подходящих для вставки таких мутаций и оказывающих значительное влияние на формирование сетевых сессий. Для этого был реализован механизм предварительного анализа клиентского кода, который выявляет переменные, потенциально влияющие на ход сетевой сессии. Полученные данные сопоставляются с трассой эталонного запуска, что позволяет определить именно те точки, где целесообразно применять прицельные мутации. Выполненная предобработка исходного кода упрощает последующий анализ LLM-моделью, так как модель исследует только отобранные переменные и подбирает оптимальные варианты значений для мутаций, расширяя пространство генерируемых сетевых сессий.

В ходе экспериментов была протестирована серверная часть live555 (протокол RTSP) с помощью модифицированного клиента на Python. Результаты показали, что разработанный метод в составе ИСП Fuzzer позволяет достичь большего покрытия кода, чем AFLNet, за тот же промежуток времени. Это указывает на эффективность предложенного подхода к фаззингу сетевых протоколов. Для проверки эффективности второго алгоритма был проведен фаззинг популярной криптографической библиотеки OpenSSL. Результатом работы является автоматизация процесса расстановки точек мутации в клиентском коде,

что существенно упрощает процесс предобработки исходного кода модифицированного клиента для фаззинга и позволяет генерировать новые сетевые сессии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Li J., Zhao B., Zhang C. Fuzzing: a survey // Cybersecurity. 2018. Т. 1. С. 1–13.
- [2] ИСП Crusher: комплекс динамического анализа программ // <https://www.ispras.ru/technologies/crusher/>

## ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ПРЕДСКАЗАНИЯ RTT В TCP

Гетьман Александр Игоревич, Головаш Денис Ростиславович<sup>1</sup>, Степанов Иван Александрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: ever@ispras.ru, golovash@ispras.ru

<sup>2</sup> Институт системного программирования имени В. П. Иванникова РАН, e-mail: ivan\_mipt@ispras.ru

RTT (Round Trip Time) — это время, необходимое для отправки пакета данных от источника до получателя и обратно. Это важный параметр сетевой производительности, который позволяет оценить задержку в сети. В протоколе TCP важную роль занимает таймер повторной передачи (RTO), истечение которого может служить сигналом о перегрузке. Поэтому, предсказание RTT является важной составляющей алгоритмов контроля перегрузки (ССА). Проблема выбора данного таймера связана с тем, что RTT с точки зрения случайной величины имеет высокую дисперсию, что заметно осложняет предсказание.

В основе алгоритмов ССА, как правило, лежит алгоритм Джейкобсона [1], предсказывающий RTT методом скользящего среднего. Однако метод скользящего среднего может плохо работать для величин из распределений с тяжёлым хвостом, к которому можно отнести RTT.

**Основные результаты работы** В данной работе проведено исследование и реализация различных алгоритмов предсказания RTT для протокола TCP. Для этого были решены следующие задачи:

- Проведено исследование литературы по соответствующей теме.
- Собран набор сетевых трасс для обучения, содержащий различные сетевые сценарии.
- Выбраны оптимальные признаки для предсказания RTT.
- На основе собранного датасета обучены следующие модели машинного обучения: Случайный лес, Линейная регрессия и рекуррентная нейронная сеть.
- Подобранны оптимальные гиперпараметры моделей.
- Выбран оптимальный алгоритм из числа обученных.



Полученные результаты показывают улучшение работы алгоритма, основанного на Случайном лесе по сравнению с алгоритмом Джейкобсона на тестовой выборке. Таким образом, можно утверждать, что алгоритмы, основанные на машинном обучении могут быть использованы для предсказания RTT в протоколе TCP.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jacobson V. Berkeley TCP evolution from 4.3-tahoe to 4.3-reno //Proceedings of the 18<sup>th</sup> Internet Engineering Task Force, September 1990. – 1990.

## РЕАЛИЗАЦИЯ И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЛАНИРОВЩИКОВ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОТОКОЛОВ В МНОГОПУТЕВОМ РЕЖИМЕ

Гетьман Александр Игоревич, Попов Максим Владимирович<sup>1</sup>, Степанов Иван Александрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: ever@ispras.ru, mpopov@ispras.ru

<sup>2</sup> Институт системного программирования имени В. П. Иванникова РАН, e-mail: ivan\_mipt@ispras.ru

Многопутевой режим, позволяющий одновременно использовать несколько сетевых путей, обеспечивает более высокую пропускную способность и повышенную отказоустойчивость. Один из самых перспективных транспортных протоколов для реализации данной идеи — QUIC, который выступает в качестве альтернативы TCP. Цель его создания заключалась в повышении производительности за счёт быстрого установления безопасного соединения.

Реализация многопутевого режима в QUIC сочетает преимущества этого транспортного протокола и идеи одновременного использования нескольких сетевых маршрутов. Несмотря на то что существуют различные решения для реализации подобных подходов, все они ещё находятся в стадии разработки и не являются стандартизированными. Поэтому создание эффективных методов для реализации многопутевой передачи в QUIC остаётся актуальной задачей.

Центральное место в многопутевом режиме занимает планировщик — компонент, управляющий распределением пакетов между несколькими сетевыми путями таким образом, чтобы оптимизировать использование всех доступных ресурсов. Существуют планировщики, основанные на эвристических методах, и планировщики, основанные на обучении с подкреплением. К первой группе можно отнести minRTT [1], BLEST [2], ECF [3]; ко второй — планировщики, использующие Q-обучение, глубокое Q-обучение и подход многорукого бандита [4].

**Основные результаты работы** В данной работе исследованы и реализованы различные планировщики для многопутевого протокола QUIC. Проведено их численное сравнение с точки зрения пропускной способности и RTT в

широком диапазоне сетевых характеристик (ширина канала, процент потерь, задержка). Для эмуляции сложных сетевых топологий использовался инструмент Mininet, позволяющий воспроизводить широкий спектр сетевых сценариев. Полученные результаты показывают, что в разных сетевых условиях наиболее эффективными могут оказаться различные решения. Таким образом, на данный момент не существует единого планировщика, которое эффективно работало бы во всех сетевых средах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Raiciu C. et al. How hard can it be? designing and implementing a deployable multipath TCP //9th USENIX symposium on networked systems design and implementation (NSDI 12). – 2012. – С. 399-412.
- [2] Ferlin S. et al. BLEST: Blocking estimation-based MPTCP scheduler for heterogeneous networks //2016 IFIP networking conference (IFIP networking) and workshops. – IEEE, 2016. – С. 431-439.
- [3] Lim Y. et al. ECF: An MPTCP path scheduler to manage heterogeneous paths //Proceedings of the 13th international conference on emerging networking experiments and technologies. – 2017. – С. 147-159.
- [4] Wu H. et al. Peekaboo: Learning-based multipath scheduling for dynamic heterogeneous environments //IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 2020. – Т. 38. – №. 10. – С. 2295-2310.

## ДОПОЛНЕНИЕ ЗАПРОСОВ К LLM ИНФОРМАЦИЕЙ ИЗ СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗАТОРА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПРЕДУПРЕЖДЕНИЙ

**Игнатъев Валерий Николаевич<sup>1</sup>, Панов Данила Дмитриевич<sup>2</sup>, Шимчик  
Никита Владимирович<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования ВМК МГУ, ИСП РАН, e-mail: valery.ignatyev@ispras.ru

<sup>2</sup> Кафедра системного программирования ВМК МГУ, ИСП РАН, e-mail: d.panov@ispras.ru

<sup>3</sup> ИСП РАН, e-mail: shimnik@ispras.ru

При разработке промышленных инструментов статического анализа требуется сохранять компромисс между точностью, полнотой и временем анализа, что неизбежно приводит к появлению ложных срабатываний и накладывает на пользователя необходимость трудоёмкого отбора истинных предупреждений. Одной из важных задач является автоматизация этого процесса.

Перспективным инструментом в решении задач, связанных со статическим анализом, являются большие языковые модели (LLM), что было показано в статье [1]. Их способность понимать текст и код на разных языках, производить размышления и принимать решения делает возможной, в частности, автоматизацию процесса классификации предупреждений.

Однако LLM имеют существенный недостаток в виде снижения качества ответов при увеличении размера запроса. Вместе с тем, попытки классифицировать предупреждения с использованием только небольшого контекста привели к достаточно низким метрикам точности и полноты [1]. Для эффективного использования LLM необходимо извлекать из анализируемого проекта минимальное количество релевантной информации, достаточной для определения истинности рассматриваемого предупреждения.

Для преодоления вышеописанной проблемы предлагается использовать данные, генерируемые статическим анализатором в процессе анализа проекта. Абстрактные синтаксические деревья и таблицы использований символов в коде позволяют более точно извлекать строки кода вокруг предупреждений и определения упоминаемых в этих строках переменных. Резюме представляют собой краткую выжимку различных свойств методов или типов, достаточных для статического анализа. Обычно резюме короче, чем код соответствующего определения, поэтому использование резюме для описания использованных в коде методов и типов уменьшает размер запроса к LLM.

В работе оценивается влияние применения описанного подхода на точность и полноту классификации истинности на размеченном наборе из 4 типов предупреждений статического анализатора SharpChecker [2]. Было показано, что изменение точности и полноты сильно зависит от стратегии выбора релевантных переменных и от содержания резюме. Так, на наборе типа `HANDLE_LEAK` (утечка ресурсов) была увеличена полнота благодаря информации о ресурсах в резюме; на наборе `UNREACHABLE_CODE` (недостижимый код) дополнительные определения переменных повысили обе метрики. Указанные результаты свидетельствуют о необходимости дальнейшей оптимизации предоставляемой в запросе информации под каждый тип предупреждений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Large language models in source code static analysis / V.N. Ignatyev, N.V. Shimchik, D.D. Panov, A.A. Mitrofanov // 2024 Ivannikov Memorial Workshop (IVMEM). 2024. С. 28–35.
- [2] SharpChecker: Static analysis tool for C# programs / V.K. Koshelev, V.N. Ignatiev, A.I. Borzilov, A.A. Belevantsev // Programming and Computer Software. 2017. Т. 43. С. 268–276.

## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПОМЕЧЕННЫХ ДАННЫХ

**Игнатъев Валерий Николаевич, Рагозина Полина Ильинична, Беляев  
Михаил Владимирович**

ИСП РАН, кафедра СП ВМК МГУ, e-mail: valery.ignatyev@ispras.ru, pragozina@ispras.ru,  
mbelyaev@ispras.ru

Анализ помеченных данных — это метод поиска ошибок в программах, в основе которого лежит идея продвижения пометок, «нанесённых» на определённые данные, по всем возможным путям их распространения — от инструкции или функции «источка» до «стока». Каждый тип ошибки задаётся в текстовом файле, описывающем множества стоков, истоков и способов распространения и снятия пометок. Схема работы анализа обычно такова: на этапе анализа абстрактного синтаксического дерева (АСД) обнаруживаются все истоки в программе, а затем для каждого правила движок анализа обрабатывает все инструкции межпроцедурного графа потока управления (ГПУ) для распространения помеченных данных. У такого алгоритма есть ряд проблем, решению которых посвящена данная работа.

Первая проблема — повторный анализ. Многие правила имеют одинаковые истоки и правила распространения, а различаются только стоками. Для них возможно реализовать совместный анализ инструкций таким образом, чтобы сразу обрабатывались все похожие дефекты, что позволяет избавиться от дублирования одинаковых вычислений и повысить масштабируемость в случае добавления новых правил.

Вторая проблема возникает при поиске истоков и состоит в большом количестве операций сравнения строк, так как, например, для каждого вызова необходимо сопоставить прототип вызываемой функции с каждым истоком каждого правила. Для ускорения была предложена замена поиска подстроки и по регулярному выражению на сопоставление строк с начала.

Третья проблема — избыточный анализ функций, которые никак не взаимодействуют с помеченными данными — например, при записи помеченных данных в поле объекта при анализе методов, его не использующих. Предварительный анализ переменных, к которым обращается каждая функция, включая все вызванные функции, позволяет пропустить их обработку.

Предложенные подходы были реализованы и протестированы в разрабатываемом в ИСП РАН статическом анализаторе SharpChecker, реализующем комплекс алгоритмов, включая анализ АСД, символическое выполнение, анализ помеченных данных. Тестирование выполнялось на наборе открытых проектов из 5 млн. строк кода.

Наличие в SharpChecker этапа обхода АСД и графа вызовов позволило заранее записывать в резюме каждой функции используемые ей поля (с учётом рекурсии) и в дальнейшем пропускать анализ функции, если среди используемых ей полей нет помеченных. В таком случае анализ помеченных данных занимает то же время из-за установленных в SharpChecker лимитов, но обрабатывает больше путей распространения, что позволяет обнаруживать больше дефектов (200 новых срабатываний, из них 175 истинных). Замена поиска по всей строке поиском в начале сократить время обнаружения истоков в 2,2 раза. Наконец, совместная обработка истоков ускорила этап анализа помеченных данных более чем в 2 раза.

Таким образом, предложенные методы ускорения анализа позволяют без потери качества результатов повысить производительность анализа помеченных данных и его полноту.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кошелев В. К., Игнатъев В. Н., Борзилов А. И. Инфраструктура статического анализа программ на языке С# // Труды ИСП РАН. 2016. Т. 28, № 1. С. 21–40.
- [2] Сравнительный анализ двух подходов к статическому анализу помеченных данных / Беляев М. В., Шимчик Н. В., Игнатъев В. Н., Белеванцев А. А. // Труды ИСП РАН. 2017. Т. 29, № 3. С. 99–116.

## **МЕХАНИЗМ ВЫЯВЛЕНИЯ ИНЦИДЕНТОВ В СЕТЯХ ЦОД НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ СЕТЕВЫХ МЕТРИК**

**Корухова Людмила Сергеевна, Тулин Дмитрий Ильич<sup>1</sup>, Столяров Роман  
Константинович, Богомолов Игорь Владимирович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования ВМК МГУ, e-mail: sp@cs.msu.ru, hijito@yandex.ru

<sup>2</sup> Институт системного программирования им. В.П. Иванникова, e-mail: sadimer@ispras.ru, bogomolov@ispras.ru

Центры обработки данных (ЦОД [1]) обеспечивают непрерывную работу современных сервисов и приложений, таких как облачные платформы и системы обработки больших данных. С ростом объёма трафика и числа пользователей повышаются требования к надёжности сетей ЦОД. Ключевая задача управления — оперативная диагностика инцидентов: перегрузок, сбоев каналов связи, отказов оборудования. Такие проблемы вызывают задержки и простои, снижая качество обслуживания.

В рамках программно-конфигурируемых сетей (SDN [3]) развивается парадигма сетей, основанных на знаниях - Knowledge-Defined Networking (KDN [2]), использующая разделение уровня передачи данных (Data Plane) и уровня управления (Control Plane). Это позволяет собирать метрики с сетевых

устройств, агрегировать их и формировать знания в Knowledge Layer (Уровень Знаний). Полученные данные применяются для автоматизации управления, предсказания сбоев и оптимизации сети в реальном времени. KDN активно исследуется в мобильных сетях, включая технологии 6G [4].

На основе статей [5–7] и опыта эксплуатации сетей в ООО «Системные Решения» составлена классификация внутренних ошибок: физические (обрывы кабелей, шумы, скачки напряжения, отказы оборудования) и программные (ошибки MTU, петли STP, сбой маршрутизации OSPF, конфликты MAC/IP). Внешние угрозы (перегрузки, DDoS-атаки, TCP incast) учтены, но не детализированы, так как внутренние проблемы чаще поддаются контролю и профилактике. Анализ внутренних факторов повышает отказоустойчивость сети и готовит её к внешним воздействиям.

Для исследования развёрнут тестовый стенд в GNS3 с виртуальными коммутаторами на Cumulus Linux. Агент sFlow собирал метрики в реальном времени, а трафик генерировался на основе данных [8], отражая типичные нагрузки ЦОД. Рассмотрены сценарии: некорректная настройка MTU, обрывы кабелей, временные сбои оборудования.

Метрики собирались 140 часов с частотой 15 секунд (около 33 тысяч точек). Данные обрабатывались скользящим окном длительностью 4 минуты (16 точек). Для классификации аномалий выбрана одномерная свёрточная нейронная сеть (1D-CNN), подходящая для анализа временных рядов. Модель обучалась на 32803 окнах, ошибившись в 40 случаях, что дало точность 99.88%. Это подтверждает эффективность подхода для выявления инцидентов в сетях ЦОД.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] ГОСТ Р 70627-2023. Центры обработки данных. Термины и определения. – 2023. – <https://protect.gost.ru/document.aspx?control=7&id=249963> (дата обращения: 2024-12-09).
- [2] Mestres A. et al. Knowledge-defined networking //ACM SIGCOMM Computer Communication Review. – 2017. – Т. 47. – №. 3. – С. 2-10.
- [3] Kreutz D. et al. Software-defined networking: A comprehensive survey //Proceedings of the IEEE. – 2014. – Т. 103. – №. 1. – С. 14-76.
- [4] Ashtari S. et al. Knowledge-defined networking: Applications, challenges and future work //Array. – 2022. – Т. 14. – С. 100136.
- [5] Herodotou H. et al. Scalable near real-time failure localization of data center networks //Proc. 20th ACM SIGKDD. – 2014. – С. 1689-1698.
- [6] Wu X. et al. NetPilot: Automating datacenter network failure mitigation //Proc. ACM SIGCOMM. – 2012. – С. 419-430.
- [7] Vargas-Arcila A. et al. SOFI dataset: Symptom-fault relationship for IP-network //Computer Networks. – 2022. – Т. 216. – С. 109233.

- [8] Benson T. et al. Understanding data center traffic characteristics //ACM SIGCOMM Computer Communication Review. – 2010. – Т. 40. – №. 1. – С. 92-99.

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕНЕРАЦИИ КОДА МАТРИЧНОГО УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРНОГО ПРОЦЕССОРА**

**Кулагин Иван Иванович, Романов Михаил Максимович**

Кафедра системного программирования, e-mail: i.kulagin@ispras.ru, mmromanov@ispras.ru

Большую часть времени выполнения многих современных нейронных сетей составляет операция матричного умножения. Для ускорения исполнения искусственных нейронных сетей в числе прочего применяются специализированные вычислители. Одним из их видов являются тензорные (нейронные) процессоры [1], ускоряющие выполнение перемножения матриц и векторных операций. Набор машинных инструкций в таких архитектурах сильно отличается от инструкций традиционных центральных процессоров, поэтому генерация кода для них требует особого подхода.

В данной работе разработан алгоритм генерации кода матричного умножения для архитектуры DaVinci, на которой основано семейство процессоров Ascend. Данная реализация является частью компилятора операций нейронных сетей, созданного на базе инфраструктуры MLIR [2].

В архитектуре DaVinci [3] присутствует инструкция, выполняющая непосредственно матричное умножение. Однако для этой инструкции данные должны быть загружены в определённые буферы тензорного процессора. Кроме того, сомножители должны быть представлены в особом формате. Традиционный подход состоит в том, чтобы разбить алгоритм на три независимые операции: приведение сомножителей к требуемому формату (т. н. фрактализация), само умножение и приведение произведения к исходному формату. Для выполнения каждой из этих операций данные загружаются в буферы процессора, обрабатываются и выгружаются обратно в ОЗУ. В данной же работе предложена реализация, в которой в буферы тензорного процессора загружаются матрицы в обычном построчном формате, там они фрактализуются, перемножаются, произведение дефрактализуется обратно и выгружается. Преимущество данного подхода состоит в том, что существенно снижаются накладные расходы на перемещение фрактализованных матриц с устройства в ОЗУ и обратно.

Архитектура DaVinci содержит несколько параллельно работающих вычислительных элементов: векторный, скалярный, матричный и устройства перемещения данных. Таким образом архитектура DaVinci реализует параллелизм на уровне инструкций. Кроме того, вместимость буферов устройства зачастую меньше, чем размер сомножителей, из-за чего приходится прибегать к блочному матричному умножению. В работе предложен алгоритм генерации

кода умножения матриц, повышающий эффективность использования параллелизма на уровне инструкций. В нём реализована стратегия выбора размеров блоков и организации циклов на основе имеющихся ограничений и эвристик.

Эффективность разработанного алгоритма экспериментально исследована на тестовом наборе, представляющем собой перемножение матриц определённых размеров, взятых из нейронных сетей архитектуры трансформер. Получена производительность, превосходящая производительность при традиционном подходе. Кроме того, алгоритм применим при любых размерах сомножителей и не требует явной настройки параметров деления на блоки.

В докладе будут раскрыты особенности предлагаемого алгоритма, описание экспериментов и сравнение результатов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hennessy J. L., Patterson D. A. Computer Architecture: A Quantitative Approach. Cambridge: Elsevier. 2019.
- [2] MLIR: Scaling Compiler Infrastructure for Domain Specific Computation / C. Lattner, M. Amini, U. Bondhugula, A. Cohen, A. Davis, J. Pienaar, R. Riddle, T. Shpeisman, N. Vasilache, O. Zinenko // 2021 IEEE/ACM International Symposium on Code Generation and Optimization (CGO). 2021. Pp. 2–14.
- [3] Xiaoyao Liang. Ascend AI Processor Architecture and Programming. Amsterdam: Elsevier. 2020. Pp. 18–98.

## ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОВЕРЛЕЙНЫМИ СЕТЯМИ НА ФИЗИЧЕСКИХ КОММУТАТОРАХ В СЕТЯХ ЦОД

Морозов Сергей Вячеславович, Арефьев Вениамин Андреевич<sup>1</sup>,  
Борисенко Олег Дмитриевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования ВМК МГУ, e-mail: serg@ispras.ru, veniamin.va@ispras.ru

<sup>2</sup> Институт системного программирования им. В.П. Иванникова, e-mail: borisenko@ispras.ru

В современных центрах обработки данных (ЦОД), предоставляющих облачные услуги, используется огромное количество серверов и сетевого оборудования. Автоматизация управления оверлейными сетями и обеспечение безопасности становятся особенно важными задачами в условиях масштабных облачных инфраструктур с большим числом коммутаторов и клиентов. Дополнительные трудности создаёт разнообразие сетевых устройств, требующих применения различных протоколов для настройки. В таких условиях управление и поддержка конфигураций становятся сложными и затратными. С учётом постоянных изменений и роста нагрузки автоматизация управления физическими коммутаторами приобретает особую важность, снижая сложность и стоимость обслуживания, а также повышая гибкость и надёжность всей инфраструктуры.



В ходе работы были рассмотрены различные подходы к управления сетевым оборудованием. Simple Network Management Protocol(SNMP), Restconf [1] и Netconf [2] позволяют управлять коммутаторами с помощью интерфейса, который зависит от вендорской реализации. Протокол OpenFlow [3] реализуют частично, либо с большими ограничениями, что не даёт возможности использовать его без модификаций под конкретную модель. Язык программирования P4 [4] позволяет полностью запрограммировать поведение коммутатора и API для его управления, но количество поддерживающих его моделей сильно ограничено. Switch Abstraction Interface(SAI) [5] же предоставляет унифицированный способ управления сетевой картой коммутатора скрывая различия между конкретными реализациями и поддерживается многими вендорами. Его активно используют и развивают совместно с проектом сетевой операционной системы SONiC [6], именно поэтому разрабатываемый в этой работе инструмент будет ориентирован на работу с этой операционной системой.

В рамках работы была проведена модификация инструмента Netman, разработанного в ИСП РАН. Его функциональность - создание и удаление сетевых сегментов(оверлейный сетей) и связывании портов коммутаторов с этими сегментами. В нём реализован модуль OpenFlow, который создаёт оверлейные сети с помощью протокола QinQ [7] и управляет коммутаторами с помощью OpenFlow. В рамках данной работы был написан новый модуль SONiC, который создаёт оверлейные сети с помощью стека технологий BGP [8], VxLAN [9], EVPN [10], а управление происходит с помощью очереди сообщений RabbitMQ и агентов на коммутаторах.

Принцип работы модуля SONiC заключается в том, что при модификации сетевых сегментов или связывании портов посылает сообщение об этом действии в очередь сообщений, а агенты на коммутаторах принимают эти сообщения и вносят необходимые изменения в конфигурацию сетевого оборудования, что обеспечивает консистентность конфигурации на коммутаторах. Данный подход обеспечивает надёжный и масштабируемый способ управления оверлейными сетями на множестве физических коммутаторов различных производителей.

Для проверки корректности подхода и его реализации использовалась среда GNS3 [11]. В ней была создана топология с пять 5 коммутаторами и 8 серверами, на которой проводилось создание оверлейных сетей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] RESTCONF Protocol <https://www.ietf.org/rfc/rfc8040.txt>
- [2] NETCONF Configuration Protocol <https://www.ietf.org/rfc/rfc4741.txt>
- [3] OpenFlow Switch Specification <https://suhub6776.firebaseio.com/Presentation/20141118/openflow-spec-v1.4.0.pdf>
- [4] P4 - Language Consortium <https://p4.org/>
- [5] SAI » Open Compute Project <https://www.opencompute.org/projects/sai>

- [6] SONiC » Open Compute Project <https://www.opencompute.org/projects/sonic>
- [7] 802.1Q-2014 - Bridges and Bridged Networks <https://www.ieee802.org/1/pages/802.1Q-2014.html>
- [8] A Border Gateway Protocol 4 (BGP-4) <https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc4271>
- [9] Virtual eXtensible Local Area Network (VXLAN): A Framework for Overlaying Virtualized Layer 2 Networks over Layer 3 Networks <https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc7348>
- [10] Integrated Routing and Bridging in Ethernet VPN (EVPN) <https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc9135>
- [11] GNS3 | The software that empowers network professionals <https://www.gns3.com/>

## **РЕАЛИЗАЦИЯ МЕХАНИЗМА АУГМЕНТАЦИИ ДАННЫХ В ЗАДАЧЕ ДООБУЧЕНИЯ МОДЕЛИ ИНСТРУМЕНТА DEEPVARIANT**

**Пеструилова Анастасия Николаевна, Турдаков Денис Юрьевич<sup>1</sup>,  
Гугучкин Егор Павлович, Карпулевич Евгений Андреевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра Системного программирования, e-mail: [pestruilova\\_an@ispras.ru](mailto:pestruilova_an@ispras.ru), [turdakov@ispras.ru](mailto:turdakov@ispras.ru)

<sup>2</sup> ИСП РАН, e-mail: [guguchkin@ispras.ru](mailto:guguchkin@ispras.ru), [karpulevich@ispras.ru](mailto:karpulevich@ispras.ru)

**Введение** Генетическая информация, закодированная в молекуле ДНК, играет ключевую роль в функционировании организма, определяя его наследственные характеристики и предрасположенность к заболеваниям. Современные методы полногеномного секвенирования (WGS) [1] позволяют анализировать структуру ДНК, выявлять мутации и применять эти данные в медицине, генетике и биоинформатике. Одним из инструментов анализа данных WGS является DeepVariant [2] — модель глубокого обучения, разработанная Google, которая использует сверточные нейронные сети для выявления генетических вариантов. Имея высокую точность, модель остаётся «чёрным ящиком», что затрудняет анализ ее поведения в специфических исследованиях. В данной работе рассматриваются методы дообучения DeepVariant с использованием объяснимого ИИ (XAI) и аугментации данных. Подход XAI позволяет выявлять недостатки модели и определять ключевые области для улучшения, а аугментация данных помогает повысить качество модели.

**Постановка задачи** Цель данного исследования — разработка и тестирование методов дообучения модели DeepVariant для повышения её точности с использованием объяснимого ИИ и аугментации данных. Для этого необходимо изучить принципы работы DeepVariant, собрать данные для обучения и, используя тепловые карты, выявить ключевые области для аугментации.

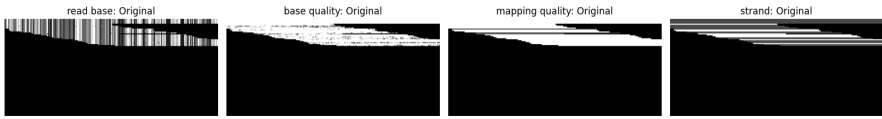


Рис. 1: Графические каналы, используемые инструментом DeepVariant.

**Решение** В рамках исследования был проведён анализ тепловых карт, построенных с использованием метода GradCam [3], для выявления ключевых областей, влияющих на предсказания модели DeepVariant. На основе полученных данных был выбран и реализован метод аугментации, основанный на изменении направления прочтений (по каналу strand). Реализация была выполнена двумя способами: встраиванием в основной код модели и в виде отдельного скрипта.

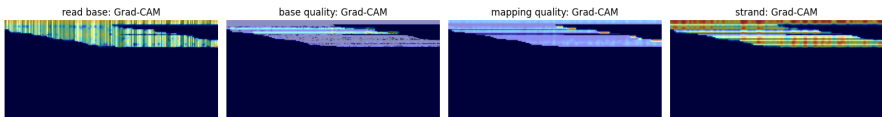


Рис. 2: Применение метода GradCam.

Для оценки эффективности предложенного подхода было проведено обучение модели с аугментацией и без неё, а результаты анализировались с использованием кросс валидации и усреднялись для объективного сравнения. В тестировании аугментаций использовались заранее подготовленные генетические данные.

Type	Recall	Precision	F1_Score
SNP	0.887686	0.996326	0.938873
SNP with augmentation	0.96938	0.998024	0.983493

Таблица 5: Результаты обучения моделей с аугментацией и без (SNP).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ng P. C., Kirkness E. F. Whole genome sequencing // Genetic variation: Methods and protocols. 2010. С. 215-226.
- [2] Poplin R. et al. A universal SNP and small-indel variant caller using deep neural networks // Nature biotechnology. 2018. Т. 36. №. 10. С. 983–987.

Type	Recall	Precision	F1_Score
INDEL	0.663925	0.949079	0.781296
INDEL with augmentation	0.811997	0.986778	0.890896

Таблица 6: Результаты обучения моделей с аугментацией и без (INDEL).

- [3] Selvaraju R. R. et al. Grad-CAM: visual explanations from deep networks via gradient-based localization // International journal of computer vision. 2020. T. 128. С. 336–359.

## **АНАЛИЗ JAVA-ПРОГРАММ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО СИМВОЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ**

**Савидов Георгий Анатольевич, Белеванцев Андрей Андреевич<sup>1</sup>, Куц Даниил Олегович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: s02230496@gse.cs.msu.ru, abel@ispras.ru

<sup>2</sup> Институт системного программирования, e-mail: kutz@ispras.ru

Тестирование и эксплуатация программных продуктов неразрывно связаны с выявлением и устранением уязвимостей и ошибок, которые могут повлиять на безопасность и стабильность программного обеспечения. Одним из наиболее эффективных методов динамического тестирования является фаззинг — автоматизированный способ генерации и подачи случайных или специально сконструированных входных данных для выявления неожиданных сбоев.

Комбинирование фаззинга с символьным выполнением позволяет значительно повысить покрытие кода за счет целенаправленного обхода условных переходов. Такой подход уже успешно применялся для анализа программ, написанных на компилируемых языках, и продемонстрировал свою эффективность на практике [1]. Однако для языка программирования Java существующие инструменты символьного выполнения (например, [2]), как правило, остаются на уровне исследовательских проектов и не адаптированы для полноценного использования совместно с фаззерами.

В рамках данной работы был проведен анализ существующих инструментов динамического символьного выполнения с открытым исходным кодом. В результате был выбран инструмент SWAT [3], который послужил основой для разработки метода динамического символьного выполнения. Существенная работа была проделана по улучшению его функциональности: исправлено множество недочетов, реализована поддержка статических инициализаторов классов, а также обновлены и дополнены модели для ряда методов стандартной библиотеки Java.

Ключевыми усовершенствованиями стали полностью измененный подход к обработке массивов, что позволило добавить поддержку символьной индексации, а также реализация алгоритма инструментации частей стандартной библиотеки Java для автоматического построения формул.

Кроме того, был внедрен алгоритм отслеживания символьных данных, то есть данных, на которые может повлиять пользователь. Это позволило сократить избыточные вычисления и повысить эффективность анализа. Также было реализовано кэширование условных переходов, что обеспечило ускорение работы инструмента как в рамках одного запуска, так и при итеративном анализе.

Дополнительно был протестирован новый SMT-решатель, который на наборе примеров продемонстрировал улучшенные показатели производительности.

На финальном этапе инструмент был протестирован на ряде реальных программных проектов, что подтвердило его работоспособность и применимость в практических условиях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sydr-Fuzz: Continuous Hybrid Fuzzing and Dynamic Analysis for Security Development Lifecycle / Vishnyakov Alexey, Kuts Daniil, Logunova Vlada, Parygina Darya, Kobrin Eli, Savidov Georgy, and Fedotov Andrey // 2022 Ivannikov Ispras Open Conference (ISPRAS). — 2022. — P. 111–123.
- [2] Mues, Malte. GDart: An Ensemble of Tools for Dynamic Symbolic Execution on the Java Virtual Machine (Competition Contribution) / Malte Mues, Falk Howar. — 2022. — 03. — Pp. 435–439.
- [3] SWAT: Modular Dynamic Symbolic Execution for Java Applications using Dynamic Instrumentation (Competition Contribution) / Loose Nils, M'achtle Felix, Sieck Florian, and Eisenbarth Thomas // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems / ed. by Finkbeiner Bernd, Kovács Laura. — Cham : Springer Nature Switzerland. — 2024. — P. 399–405.

## **УНИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПОИСКА ОШИБОК В БИНАРНОМ КОДЕ В ХОДЕ КОНКРЕТНОГО И СИМВОЛЬНОГО ИСПОЛНЕНИЯ**

**Соловьев Михаил Александрович, Манушин Дмитрий Валерьевич,  
Цехмистер Александр Андреевич**

Кафедра системного программирования, e-mail: icee@ispras.ru, dman95@ispras.ru,  
alex2000@ispras.ru

Автоматизированный поиск ошибок в коде является весьма актуальной и сложной задачей. Зачастую аналитику доступен лишь запускаемый бинарный код, популярными методами исследования которого являются динамическое

фаззинг-тестирование и символьное исполнение. Хорошие результаты также показывает гибридный подход, в частности инструмент Sydr-Fuzz [1]. Дополнительно для проверки нетривиальных предикатов может быть использована инструментация бинарного кода, например, специализированные санитайзеры [2], однако большинство подобных решений не предполагают задания продвинутых пользовательских проверок. Механизм символьного исполнения в Sydr-Fuzz позволяет задавать пользовательские детекторы, однако инструмент применим только для архитектуры x86.

В данной работе в рамках инфраструктуры для анализа кода Glassfrog [3] был реализован механизм задания пользовательских детекторов ошибок, применимых без модификации как при конкретном, так и при символьном исполнении. Вместо инструментации бинарного кода, детекторы реализуются на уровне архитектурно-независимого промежуточного представления, что позволяет применять их к любому коду, который может быть к нему приведён. До или после исполнения очередной инструкции промежуточного представления для каждого детектора производится проверка условия-триггера, и при его истинности выполняется последовательность действий. Триггеры и действия могут выбираться из определённого инструментом набора или реализовываться пользователем на скриптовом языке Rhai [4]. Для детекторов, не способных работать в рамках отдельного выражения (например, требующих отслеживания знаковости выражений или операций с памятью), инструмент может поддерживать контекст и автоматически распространять пометки данных при копировании и операциях с памятью по конкретным адресам. Также детекторы могут регистрироваться на вызовы определённых функций, что позволяет отслеживать библиотечные вызовы. Для демонстрации возможностей разработанного инструмента помимо синтетических примеров были реализованы детекторы для обнаружения целочисленного переполнения и переполнения буфера, которые показали свою работоспособность.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sydr-Fuzz: Continuous hybrid fuzzing and dynamic analysis for security development lifecycle / A. Vishnyakov, D. Kuts, V. Logunova, D. Parygina, E. Kobrin, G. Savidov, A. Fedotov // 2022 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS). – IEEE, 2022. – С. 111-123.
- [2] Google Sanitizers. URL: <https://github.com/google/sanitizers> (дата обращения: 4.03.2025)
- [3] Практическая абстрактная интерпретация бинарного кода / М. А. Соловьев, М. Г. Бакулин, С. С. Макаров, Д. В. Манушин, В. А. Падарян // Труды Института системного программирования РАН. – 2020. – Т. 32. – №. 6. – С. 101-110.

- [4] Rhai — Embedded scripting language and engine for Rust. URL: <https://rhai.rs/> (дата обращения: 4.03.2025)

## СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОМПОЗИТНЫХ ТИПОВ В ЯЗЫКЕ JAVA

Субботин Даниил Николаевич, Белеванцев Андрей Андреевич<sup>1</sup>, Бородин  
Алексей Евгеньевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: daniil.subbotin@ispras.ru, abel@ispras.ru

<sup>2</sup> ИСП РАН, e-mail: alexey\_bor@ispras.ru

Статический анализ исходного кода – это анализ, который проводится без выполнения программы и для которого требуется только её исходный код. Данная магистерская работа выполнена в рамках статического анализатора Svace, разрабатываемого в ИСП РАН [1]. В Svace используется унифицированное промежуточное представление, что позволяет проводить анализ одинаково для всех языков и использовать одни и те же алгоритмы анализа для разных языков. В Svace реализованы методы анализа композитных типов для языка Go [2]. Композитные типы в Go являются частью языка и имеют особые инструкции промежуточного представления. В Java реализация композитных типов написана на самом языке и не является его частью, поэтому реализованные в Svace методы анализа для типов Go не подходят для анализа в Java. Целью работы является создание универсальной модели для анализа композитных типов в языке Java.

В работе описывается создание нового подхода для моделирования значений элементов композитных типов языка Java. Описано создание нового идентификатора значения для моделирования содержимого композитного типа и алгоритм построения путей доступа [3] для идентификации элементов. С использованием новых идентификаторов было смоделировано поведение некоторых методов базовых классов для работы с композитными типами (Map, List, String), а так же реализован детектор для поиска ошибок некорректного обращения по индексу к строке.

Для оценки результатов использовалась часть проекта с открытым исходным кодом Android-14, написанная на Java. Проведено сравнение результатов анализа до и после реализации новой модели, оценена точность нового детектора.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бородин А. Е., Дудина И. А. Внутрипроцедурный анализ для поиска ошибок на основе символического выполнения // Труды ИСП РАН, 2020, том 1, вып. 2
- [2] Субботин Д. Н., Бородин А. Е., Дворцова В. В. Статический анализ ассоциативных массивов в Go // Труды ИСП РАН, 2024, том 36, вып. 3

- [3] Khedker, Uday P. Heap reference analysis using access graphs //ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS), том 30, вып. 1

## АЛГОРИТМ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ИНДЕКСОВ ДЛЯ ФИКСИРОВАННОГО КЛАССА ЗАПРОСОВ

**Абрамов Владимир Геннадьевич, Молотилов Никита Николаевич**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: vlabr@cs.msu.ru, s02230453@gse.cs.msu.ru

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу планирования и выполнения запросов на чтение в реляционной базе данных [1]. Дано отношение с множеством атрибутов, а также класс запросов (множество шаблонов), которые требуется выполнять с наименьшей сложностью. Запрос содержит реализации фильтров и атрибут сортировки из заданного класса, а также желаемое количество получаемых кортежей, удовлетворяющих условию фильтрации и находящихся в начале списка при сортировке по заданному атрибуту.

**Алгоритм построения множества индексов.** Для ускорения выполнения запросов используем следующие типы индексов: В-дерево [2], обобщённое дерево поиска [3] (ОДП) с использованием триграммного разбиения [4].

Пусть сортировка происходит по атрибуту  $s$ . Строчными буквами обозначим атрибуты, а заглавными — параметры.

I. Приведем все шаблоны запросов к сокращенной ДНФ с поднятыми отрицаниями.

II. Разобьем импликанты из приведенных шаблонов запросов из рассматриваемого класса на 5 групп исходя из структуры формулы условия фильтрации.

III. Для каждой встречающейся импликанты добавим в множество индексов определённый их набор из соответствующей группы (символ  $|$  отделяет атрибуты для упорядочивания от атрибутов для триграммного разбиения):

1.  $(x = A) \& (y = B) \& \dots$  — В-дерево  $(x, y, \dots, z)$ .
2.  $(x > A) \& (y = B) \& \dots$  — В-дерево  $(y, \dots, x), (y, \dots, s)$ .
3.  $(x \supseteq A) \& (y = B) \& \dots$  — ОДП  $(y, \dots | x, \dots)$ , В-дерево  $(y, \dots, s)$ .
4.  $(x \supseteq A) \& (y > B) \& (z = C) \& \dots$  — ОДП  $(z, \dots | x, \dots)$ , В-дерево  $(y, \dots, x), (y, \dots, s)$ .
5.  $(x \not\supseteq A) \& (y \supseteq B) \& (z > C) \& (a = D) \& \dots$  — ОДП  $(a, \dots | y, \dots)$ , В-дерево  $(a, \dots, z), (a, \dots, s)$ .

Результатом алгоритма является множество индексов, которые позволяют ускорить выполнение запросов из данного класса.



**Оценка сложности.** Пусть в отношении содержится  $K$  кортежей,  $L$  — лимит в запросе,  $P_k$  — количество кортежей, удовлетворяющих определенному частичному условию запроса. Оценка сложности для каждой импликанты из соответствующей группы:

1.  $O(\log(K) + L)$ .
2.  $O(\min(\log(K) + P_1 + L, \log(K) + P_2 * \log(P_2)))$ .
3.  $O(\min(\log(K) * L, \log(K) + P + L))$  в среднем.
4.  $O(\min(\log(K) * P_1 + \log(L) * L, \log(K) + P_2 + L, \log(K) + P_3 + T * \log(T)))$  в среднем.
5. Аналогично п.4, с измененными параметрами  $P_i$ .

Итоговая сложность выполнения запроса равна  $O(\Sigma C)$  — сумма сложностей для всех импликант.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кузнецов С. Д. Основы баз данных : учебное пособие. М. : Интернет—Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 484 с.
- [2] Bayer R., McCreight E. Organization and maintenance of large ordered indices // Proceedings of the 1970 ACM SIGFIDET (Now SIGMOD) Workshop on Data Description, Access and Control. 1970. P. 107–141.
- [3] Hellerstein J. M., Naughton J. F., Pfeffer A. Generalized search trees for database systems // Readings in database systems. Cambridge, Massachussets : MIT press, 2005. P. 562–573.
- [4] Adams E. S., Meltzer A. C. Trigrams as index element in full text retrieval: observations and experimental results // Proceedings of the 1993 ACM conference on Computer science. 1993. P. 433–439

## МЕТОДЫ АУГМЕНТАЦИИ РУССКОЯЗЫЧНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ ТЕКСТОВ

**Волкова Ирина Анатольевна, Протасов Александр Васильевич**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: irina.a.volkova@gmail.com, mmerihseh@icloud.com

В современных задачах обработки естественного языка (NLP) существует необходимость в больших и качественных наборах данных, сбор которых требует существенных затрат времени и ресурсов. Эффективным решением проблемы ограниченности данных является аугментация [1] — создание новых образцов на основе уже имеющихся путём их модификации. Аугментация позволяет улучшить способность моделей машинного обучения к обобщению и снизить риск переобучения.

В данной работе реализованы следующие методы аугментации текстов для русского языка: контекстная замена слов с помощью языковой модели BERT [2], замена слов контекстно близкими словами, обратный перевод, случайное удаление слов из текста с заданной вероятностью, вставка контекстно близких слов в случайные позиции и перестановка пар слов в предложениях.

Для оценки применимости методов аугментации текстовых данных необходима практическая задача. В рамках работы такой задачей является классификация текстов на основе корпуса пользовательских отзывов сервиса доставки [3], представляющего собой несбалансированный набор данных с мультиклассовой разметкой. В качестве классификатора используется предварительно обученная модель BERT.

В ходе исследования проведена серия тестов с различными методами аугментации и их параметрами. Установлено, что оптимальное количество аугментированных вариантов составляет от двух до трех на каждый оригинальный текст — дальнейшее увеличение этого параметра не приводит к значимому улучшению качества классификации. Исследование эффективности комбинирования различных методов аугментации показало, что применение их ансамбля не даёт существенного прироста производительности по сравнению с использованием отдельных методов. При этом подход, основанный на контекстной замене слов, продемонстрировал наибольшую эффективность, увеличив значение качества по метрике F1-micro с 70% до 72,3%.

Эксперименты также показали, что модель, обученная на аугментированном наборе данных, быстрее адаптируется к новым данным и демонстрирует более быструю сходимость по числу эпох.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дьяконов А.Г. Аугментация для текстов [Электронный ресурс]. - Электрон. дан. - URL: <https://alexanderdyakonov.wordpress.com/2020/11/09/text-augmentation/> (дата обращения: 10.02.2025)
- [2] Devlin J. et al. Bert: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding //arXiv preprint arXiv:1810.04805. — 2018.
- [3] Набор данных для множественной классификации текстов для автоматизации исследования обратной связи пользователей Самоката – Ecom.tech, Deep Learning School. [Электронный ресурс] - URL: [https://ods.ai/competitions/dls\\_ecomtech](https://ods.ai/competitions/dls_ecomtech) (дата обращения: 10.02.2025)

## КЛАСТЕРИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ РАЗРЕЖЕННЫХ ДАННЫХ

Воропай Елена Сергеевна, Груздева Надежда Валерьевна

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: lenochka-0001@mail.ru,

nadezda.v.gruzdeva@gmail.com

Одним из методов анализа данных и поиска в них закономерностей является выявление групп схожих объектов. Психологами были собраны результаты выполнения различных тестовых заданий разными людьми. Эти данные представляют собой разреженную матрицу, в которой каждому человеку соответствует строка, а каждые несколько столбцов соответствуют одному заданию. Результаты выполнения задания человеком представлены набором чисел в соответствующих столбцах. В разных строках разный набор выполненных заданий и, соответственно, заполненных значениями столбцов. Таким образом, каждому объекту-человеку соответствует разреженный вектор числовых значений. Следует заметить, что заполнение отсутствующих значений невозможно, поскольку нет нейтрального значения для такого заполнения, любое число может быть интерпретировано как результат выполнения какого-либо задания.

Целью данной работы было выявление групп схожих объектов для дальнейшего их анализа психологами. Для этого использовались следующие методы кластеризации: агломеративная кластеризация, K-средних и DBSCAN [1]. Поскольку все они работают только с полностью заполненными векторами – были выбраны несколько заданий с наибольшим количеством участников, для каждого задания выбраны и нормализованы строки с полностью заполненными столбцами задания.

Для каждого выбранного задания объекты были кластеризованы каждым из трёх методов кластеризации. Было определено оптимальное количество кластеров для метода K-средних с помощью двух методов – метода локтя и метода силуэта, а для агломеративной кластеризации с помощью дендрограммы [1].

Результаты кластеризации оценены с помощью внутренних мер оценки качества: силуэт, индекс Калински-Харабаша, индекс Дэвиса-Болдуина [2]. В качестве дополнительных мер оценки результатов кластеризации была использована классификация объектов с помощью алгоритмов машинного обучения: случайный лес и логистическая регрессия [3].

Полученные кластеры визуализированы на пространстве сниженной размерности с использованием метода главных компонент [1]. Дополнительно были найдены группы объектов, входящие в пересечения кластеров различных заданий.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дьяконов А. Г. Машинное обучение и анализ данных. М. : 2024. Глава 24: Кластеризация.

- [2] Методы оценки качества четкой кластеризации / Е. В. Сивоголовко // Компьютерные инструменты в образовании. 2011. С. 15–22.
- [3] Дьяконов А. Г. Машинное обучение и анализ данных. М. : 2024. Глава 7: Линейные классификаторы. Глава 10: Случайные леса.

## ОПИСАНИЕ КОНТЕКСТНО-ЗАВИСИМЫХ ЯЗЫКОВ С ПОМОЩЬЮ L-ГРАФОВ

Вылиток Алексей Александрович<sup>1</sup>, Ли Цзямянь<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: vylyitok@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: lijiamian0804@live.com

В середине прошлого века Н. Хомский предложил классификацию формальных грамматик и языков, в которой важное место занимают контекстно-зависимые грамматики (КЗГ) и языки. В отличие от контекстно-свободных грамматик, широко используемых в программировании, правила продукции КЗГ позволяют замену символов в зависимости от их контекстного окружения. Эта особенность дает возможность описывать с помощью КЗГ более сложные языковые структуры, применимые в обработке естественных языков и биоинформатике. Повышенная выразительная способность КЗГ делает их подходящим инструментом для решения непростых лингвистических задач, однако их анализ сопряжён с высокой вычислительной сложностью. Обычно контекстно-зависимые языки распознаются посредством линейно-ограниченных автоматов (ЛОА), однако структура вычислений ЛОА сложна и непрозрачна для анализа, что затрудняет их применение на практике, в отличие от конечных автоматов или магазинных автоматов, которые активно используются в реальных компиляторах и языковых системах [1].

В то же время L-графы [2, 3] представляют собой более подходящий инструмент для работы с такими языками. Этот относительно новый подход позволяет выявить внутренние связи между различными языковыми характеристиками и получить ответы на достаточно трудные теоретические вопросы. Ранее авторы описали алгоритмы взаимного преобразования контекстно-свободных грамматик и L-графов, а в настоящем докладе рассматривается обобщение алгоритма построения бесконтекстных L-графов, преобразование контекстно-зависимых грамматик в эквивалентные контекстно-зависимые L-графы. Основная идея алгоритма заключается в использовании скобочных конструкций для связывания контекста при построении L-графа, а также специальных правил работы со стеком для проверки соответствия скобок, что обеспечивает выполнение контекстных условий. Кроме того, авторы применяют технику, аналогичную предсказывающему анализу в синтаксическом разборе, чтобы избежать генерации избыточных структур. Точнее, для правила вида  $\xi_1 A \xi_2 \rightarrow \xi_1 \gamma \xi_2$  при построении L-графа скобочная система связывания создаётся не при каждом по-

явлении  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , а только в тех местах, где возможно формирование структуры  $\xi_1 A \xi_2$ , что реализуется через механизм предсказания.

В докладе на нескольких примерах демонстрируются шаги построения эквивалентных L-графов по контекстно-зависимым грамматикам с различными характеристиками, а также описывается процесс распознавания цепочек с использованием полученных L-графов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sige-Yuki Kuroda *Classes of languages and linear-bounded automata* // *Information and Control*, 1964 года. 1964. Т. 7, №. 2. – с. 207-223.
- [2] Вылиток А. А., Сутырин П. Г. Характеризация формальных языков графами // *Сборник тезисов научной конференции «Тихоновские чтения», Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, 25-29 октября 2010 года. 2010. – с. 82-83*
- [3] Вылиток А. А., Ростовский А. В. О подклассах графовых представлений формальных языков // *Сборник тезисов посвященных 300-летию М. В. Ломоносова: «Ломоносовские чтения», 2011 года. 2011. – с. 98-99.*

## МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕСКОНТЕКСТНЫХ L-ГРАФОВ С ПОМОЩЬЮ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Вылиток Алексей Александрович, Му Цзиньюань

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: vylyitok@cs.msu.su, xirousang@gmail.com

Задача преобразования бесконтекстных L-графов связана с теорией формальных языков и автоматов. Бесконтекстные L-графы [1, 2] и конечные автоматы являются важными инструментами для описания и анализа формальных языков. Бесконтекстные грамматики и конечные автоматы существенно различаются по выразительной мощности: бесконтекстные грамматики способны описывать более сложные языковые структуры, достаточные для представления синтаксиса большинства языков программирования, в то время как конечные автоматы могут распознавать только регулярные языки.

Для конечных автоматов существуют алгоритмы минимизации и детерминизации, что повышает их эффективность при обработке регулярных языков, в то время как для бесконтекстных L-графов подобные алгоритмы отсутствуют. Поэтому актуален поиск подклассов бесконтекстных L-графов, в которых возможны преобразования по образцу конечных автоматов.

Бесконтекстные L-графы можно рассматривать как конечные автоматы со специальным алфавитом двухэлементных кортежей, первый элемент в которых содержит обычную пометку дуги L-графа, а второй – скобочную. Аналогичный прием рассматривался в [3]. Такой подход позволяет применять к L-графу алгоритмы эквивалентного преобразования для недетерминированных конечных

автоматов: построение эквивалентного автомата с меньшим числом вершин (оптимизация по количеству вершин) или дуг (оптимизация по количеству дуг) и другие эквивалентные преобразования. Важным направлением дальнейшего исследования является описание подклассов L-графов, для которых подобные преобразования возможны.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вылиток А. А., Сутырин П. Г. Характеризация формальных языков графами // Сборник тезисов научной конференции «Тихоновские чтения», Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, 25–29 октября 2010 года. 2010. с. 82–83.
- [2] Вылиток А. А., Ростовский А. В. О подклассах графовых представлений формальных языков // Сборник тезисов посвященных 300-летию М. В. Ломоносова: «Ломоносовские чтения», 2011 года. 2011. с. 98–99.
- [3] Generalova T., Melnikov B., Vylitok A. On the extension of the finite automata class for context-free languages specification // International Journal of Open Informational Technologies. 2018. V.6. N.8. P.1–8.

## МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ L-ГРАФА ПО ФОРМАЛЬНОЙ ГРАММАТИКЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ

Вылиток Алексей Александрович<sup>1</sup>, Касимов Руслан Рашитович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: vylitok@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: rr.kasimov@yandex.ru

Среди формальных грамматик наиболее изученными являются их подклассы с ограничениями на правила, например, контекстно-свободные грамматики. Одним из методов характеристики класса контекстно-свободных грамматик являются D-графы, представленные в работах Л. И. Станевичене [1, 2]. Понятие D-графа основано на идее связи контекстно-свободных языков с языком скобочных последовательностей Дика и является расширением понятия конечного автомата. Путь в D-графе (аналогичный пути, реализующему вычисление конечного автомата над входной цепочкой) обладает скобочным следом, являющимся печочкой языка Дика.

С помощью введения дополнительного скобочного следа понятие D-графа расширяется до понятия L-графа [3]. Контролировать независимые скобочные следы можно автоматом с несколькими магазинами (стеками), и достаточно двух магазинов, чтобы такой автомат мог моделировать машину Тьюринга, то есть распознавать рекурсивно-перечислимый язык. Поэтому посредством L-графа можно описывать рекурсивно-перечислимые языки, соответствующие грамматикам без ограничений (типа 0 по классификации Хомского). С помощью L-графов можно решать ряд прикладных задач, среди которых задачи

синтаксического анализа, оптимизации вычислительных моделей программ, генерации текстов, анализа формальных языков и другие.

В докладе рассматривается алгоритм построения L-графа по произвольной порождающей грамматике (грамматике типа 0). Алгоритм строит L-граф, по сути моделирующий выводы в исходной грамматике, так что между успешными путями в L-графе и выводами в грамматике устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Приведенный в докладе алгоритм является конструктивным доказательством того факта, что любой рекурсивно-перечислимый язык можно описать с помощью L-графа. Это значит, что любые преобразования формальных грамматик можно рассматривать и на L-графах, что дает дополнительные возможности для поиска новых фактов и более простых доказательств известных с привлечением инструментария графов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Stanevichene L. D-graphs in context-free theory // Informatica (Lithuanian Acad. Sci. Ed.) 1997. 8. N.1. P. 43–56.
- [2] Станевичене Л. И. О некоторых определениях класса КС-языков // Программирование 1999. № 5. С. 15–25.
- [3] Вылиток А. А., Ростовский А. В. О подклассах графовых представлений формальных языков // Сборник тезисов посвященных 300-летию М. В. Ломоносова: «Ломоносовские чтения», 2011 год. 2011 — с. 98–99.

## СИНТАКСИЧЕСКИЙ АНАЛИЗАТОР ПО РАСШИРЕННЫМ СЕТЯМ ПЕРЕХОДОВ

**Головин Игорь Геннадьевич, Зарипов Андрей Ринатович**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: golovin@cs.msu.ru, zaripovandrey3@mail.ru

В работе описывается синтаксический анализатор естественного языка, который планируется использовать для построения деревьев зависимостей в системе полуавтоматической разметки корпусов текстов. Центральное место в системе занимает грамматика, сгенерированная по размеченному экспертами корпусу.

Для представления грамматики выбран аппарат расширенных сетей переходов [1] (РСП). Важным достоинством сетей переходов с точки зрения анализа сгенерированных грамматик является то, что для уменьшения их размера подходят хорошо изученные методы минимизации конечных автоматов. Анализатор использует алгоритм Кока-Янгера-Касами[2](СΥΚ). Этот алгоритм обладает двумя существенными достоинствами с точки зрения задачи разметки - он нечувствителен к морфологической омонимии, а также позволяет строить частичные деревья разбора даже для неграмматичных предложений. РСП и

алгоритм СУК уже использовались в экспериментальном анализаторе [3], но он оказался плохо применим к большим сетям, сгенерированных по корпусам деревьев, что и послужило стимулом для данной работы..

Алгоритм СУК для КС-грамматик требует приведения грамматики к нормальной форме Хомского, однако для РСП можно так модифицировать алгоритм, что он будет применим к любым сетям без какого-либо их преобразования. В алгоритме СУК формируется треугольная матрица  $M$ , элементами которой являются множества деревьев разбора подцепочек входного предложения. Множество  $M[i,j]$  содержит деревья разбора подцепочек длины  $i$ , начинающихся с  $i$ -ой словоформы входного предложения,  $i = 1, \dots, n, j = i, \dots, n$ , где  $n$  - длина входного предложения. Множество  $M[i,j]$  строится на основе просмотра всех пар  $(M[i,k], M[i+k-1,j-k])$ ,  $k = i, \dots, j$ . В классическом алгоритме СУК в это множество добавляются деревья разбора, построенные по какому-то правилу грамматики  $A \rightarrow BC$ , где  $B$  - корень некоторого дерева из  $M[i,k]$ , а  $C$  - корень некоторого дерева из  $M[i+k-1,j-k]$ . В РСП узлы сети представляют собой конечные автоматы, дуги которых помечены терминальными символами, либо именами узлов. Основная идея модифицированного алгоритма СУК состоит в том, что в матрице  $M$  хранятся пути в конечных автоматах, представляющих узлы РСП. Множество  $M[i,j]$  содержит пути длины  $j$ , начинающиеся с  $i$ -ой словоформы входной цепочки. Множество  $M[i,j]$  строится из конкатенаций путей  $(P1, P2)$  таких, что  $P1 \in M[i, k], P2 \in M[i+k-1, j-k]$ , оба пути принадлежат одному узлу сети, и последнее состояние пути  $P1$  совпадает с первым состоянием пути  $P2$ . Путь  $L$  назовем редуцирующим к узлу  $A$ , если первое состояние  $L$  является начальным состоянием узла  $A$ , а последнее состояние  $L$  - финальное состояние  $A$ . Если добавляемый путь  $L$  редуцирует к узлу  $A$ , то в РСП отыскиваются все дуги, помеченные узлом  $A$ , и для каждой такой дуги в результирующее множество  $M[i,j]$  добавляется новый путь, состоящий из этой дуги. Результатом анализа входного предложения являются все пути из  $M[1,n]$ , редуцирующие к начальному узлу сети.

Программа синтаксического анализатора реализована на языке C++ с использованием системы сборки CMake и может запускаться в ОС Linux, MacOS и Windows.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вудс В.А. Сетевые грамматики для анализа естественных языков // Кибернетический Сборник. – Новая серия, вып. 13. – М.: Мир, 1976. – с. 120-158.
- [2] Kasami, T. An efficient recognition and syntax-analysis algorithm for context-free languages. Sci. Rep. AFCRL- 65-558, Air Force Cambridge Res. Lab., Bedford, Mass., 1965



- [3] Волкова И.А., Головин И.Г. Синтаксический анализ фраз естественного языка на основе сетевой грамматики // Труды международного семинара ДИАЛОГ'98 - 1998. – т.2, с.437-445.

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ТОНАЛЬНОСТИ ТЕКСТОВ**

**Дорофеев Александр Вадимович, Полякова Ирина Николаевна**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: aldor2002@bk.ru, polyak@cs.msu.ru

Прогнозирование финансовых рынков традиционно опирается на анализ количественных данных, однако в последние годы растёт интерес к использованию качественных: новости, посты в социальных сетях и аналитические обзоры. Анализ тональности текстов (Sentiment Analysis) позволяет оценить эмоциональную окраску информации и выявить её связь с динамикой рынка. В работе исследуется применение методов анализа тональности для прогнозирования движения финансового рынка на основе русскоязычных текстовых данных. Большая часть исследований по данной теме ориентирована на англоязычные тексты, поэтому для русского языка присутствует ряд проблем: существующие готовые наборы данных ограничены по объёму и тематике, а также ирония, сарказм и жаргонизмы повышают сложность автоматического анализа.

Выполнено сравнение методов анализа тональности:

- Лексиконы эмоциональной оценки: содержат слова с предопределённой эмоциональной окраской (RuSentiLex).
- Машинное обучение: линейная регрессия для прогнозирования числовой оценки тональности (от  $-1$  до  $+1$ ) на основе частоты эмоционально окрашенных слов. Требуется большой объём качественно размеченных данных, которые для русского языка менее доступны. [1]
- Глубокое обучение: архитектуры (BERT, Transformer) способны учитывать контекст и семантику. Так, например, RuBERT, показывает высокую точность, но сильно зависит от качества данных и доступных вычислительных ресурсов. [1]

Исследования на англоязычных наборах данных демонстрируют отрицательную корреляцию между новостями с положительной тональностью и волатильностью рынка (показатель изменчивости цен) на следующий день. [1, 2, 3]. Также в [1] выявлено, что негативные настроения сильнее влияют на рынок, чем позитивные. Современные методы в числе гибридных подходов улучшают точность прогнозов [1].

Проведённое сравнение методов анализа тональности позволило выбрать оптимальное решение, дополненное гибридным подходом. Было выявлено,

что на русскоязычных данных тональность также оказывает влияние на динамику рынка, что подтверждается наблюдаемой корреляцией на различных временных интервалах. На основе полученных результатов разрабатывается программа, состоящая из нескольких модулей: модуль базы данных, парсер новостей, парсер рынка, модуль анализа тональности, модуль прогнозирования и пользовательский интерфейс, позволяющая на основе получаемой информации формировать прогнозы о движении рынка.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Du K., Xing F., Mao R., Cambria E. Financial Sentiment Analysis: Techniques and Applications // ACM Comput. Surv. 2024. URL: <https://dl.acm.org/doi/full/10.1145/3649451> (дата обращения: 12.01.2025).
- [2] A Sentiment Analysis Approach to the Prediction of Market Volatility / Justina Deveikyte, Helyette Geman, Carlo Piccari, Alessandro Provetti. 2020. URL: <https://arxiv.org/abs/2012.05906> (дата обращения: 20.01.2025).
- [3] Deveikyte J., Geman H., Piccari C., Provetti A. A Sentiment Analysis Approach to the Prediction of Market Volatility // arXiv. 2020. URL: <https://arxiv.org/abs/2012.05906> (дата обращения: 17.01.2025).

## ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕЙРОСЕТИ НА ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ ШАХМАТНЫХ КОМБИНАЦИЙ

**Захаров Виктор Борисович, Волков Андрей Павлович**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: [victorldis@gmail.com](mailto:victorldis@gmail.com), [volkap03@gmail.com](mailto:volkap03@gmail.com)

В 2024 году была решена задача классификации шахматных комбинаций [1]. В качестве входных данных были выбраны аналитически вычисляемые шахматные признаки, и на их основе проведены обучение и классификация на 7 типах задач.

В этом году подобная задача была решена без использования шахматных правил вообще. На первом этапе была решена задача определения матовых позиций. Обученная на выборке из 2 млн. позиций нейросеть смогла определять мат с точностью 99.9%. Это позволило выбрать способ представления шахматных позиций - битборды, то есть, битовые маски из 64 значений для каждого типа фигур.

Для шахматных комбинаций в качестве входных данных вместо ходов была использована последовательность позиций решения задачи - битбордов. Чтобы избежать дублирования данных, в битбордах хранятся только отличия от предыдущей позиции, получаемые операцией XOR над двумя позициями. Эта простая операция в среднем в 1.5 раза сократила количество ошибок.

Параметры нейросети подбирались путем их тестирования на большом числе прогонов. Для увеличения размеров выборок применялась генерация искусственных данных (удаление и добавление фигур, отражение и сдвиги позиций). В итоге нейросеть, обученная только на простейших данных, показала лучшие результаты, чем модель, использующая шахматные признаки.

Сравнение точности моделей приведено ниже:

1. Double check. Двойной шах. 2024: 80%; 2025: 93.3%
2. Fork. Вилка. 2024: 82%; 2025: 93.4%
3. Pin. Связывание фигуры противника. 2024: 77%; 2025: 88.4%
4. Sacrifice. Жертва фигуры. 2024: 91%; 2025: 98.3%

Результаты работы используются в обучающей программе Chess King Learn.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Захаров В. Б., Пятаков Н. С. Автоматическая классификация шахматных задач // Сборник тезисов докладов конференции Ломоносовские чтения-2024, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Секция «Вычислительная математика и кибернетика», издательство ООО «МАКС Пресс» (Москва), с. 176–177

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЕБЮТНЫХ ДЕРЕВЬЕВ ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ ШАХМАТНЫХ ЗАДАЧ

Захаров Виктор Борисович, Мостяев Артем Игоревич, Цыбиков Тумэн  
Владиславович

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: victorldis@gmail.com, Reistlin12@gmail.com,  
tumen.tsybikov04@mail.ru

Авторами доклада создана программа Chess King Training, предназначенная для тренировки шахматных дебютов. Для обеспечения работы программы была собрана статистика по 8 миллионам шахматных партий, какие ходы в каких позициях чаще всего применяются шахматистами разной силы. Также дебютные позиции (40 миллионов) были проанализированы шахматными программами с целью выявления типовых ошибок в различных дебютах.

Программа имеет несколько режимов тренировки:

1. Тренировка наиболее популярных ходов.
2. Тренировка определенного дебюта.
3. Тренировка ловушек, то есть, вариантов, наиболее часто приводящих к грубым ошибкам.

Последний вид тренировки представляет наибольший интерес. Для формирования задач потребовалось обработать статистические и деревья с анализом.

Были написаны функции минимакса (полный, инкрементный) на ориентированных графах [1, 2] и различные виды обхода деревьев (последовательный, в глубину, в ширину).

Успех принятых при разработке программы решений демонстрирует миллион скачиваний для платформ Android и iOS.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Maschler M., Solan E., Zamir S. *Game Theory* // Cambridge University Press. 2013. pp. 176–180. ISBN 9781107005488.
- [2] Захаров В. Б., Мостяев А. И. Алгоритмы минимакса в шахматной информатике // Сборник тезисов докладов конференции Ломоносовские чтения-2024, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Секция «Вычислительная математика и кибернетика», издательство ООО «МАКС Пресс» (Москва), с. 175–176

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ МАРШРУТОВ ПО ОПИСАНИЮ

**Корухова Юлия Станиславовна, Герелюк Илья Сергеевич**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: yulia@cs.msu.ru, ilyagerelyuk5@gmail.com

В современных картографических и навигационных информационных системах построение маршрута на карте происходит, как правило, явным указанием начальной точки, конечной точки и, возможно, промежуточных точек. Человек запоминает маршрут по некоторым действиям, направлениям, а также ориентирам, которые находятся вдоль маршрута. При этом они могут относиться к некоторым классам объектов, иметь признаки, но этого может быть недостаточно для однозначного отождествления с объектами на карте.

В рамках работы для упрощения взаимодействия человека с такими сервисами и расширения их возможностей, разработана модель представления описания маршрута в виде семантической сети, а также предложены методы построения на карте маршрута, представленного в таком виде.

Описание маршрута представляет собой семантическую сеть, состоящую из последовательности вершин — путевых точек, соединенных директивами направления движения. Каждая путевая точка связана с набором ориентиров — объектов реального мира, имеющих свои атрибуты и расположение относительно маршрута. Явно задана лишь начальная точка и азимут в ней.

Для решения задачи в работе предложены несколько различных методов и выполнено их сравнение:

1. Метод, основанный на правилах, заключается в поиске всевозможных объектов, соответствующих ориентирам в ограниченных областях, и оценка

соответствующих маршрутов, проходящих вблизи них. Он позволяет успешно строить большинство маршрутов, однако перебор вариантов занимает достаточно много времени.

2. Метод, основанный на правилах с обратной связью, может уменьшить перебор вариантов и сделать ответ точнее.
3. Динамическое построение маршрута путем выбора случайных объектов и оценивания «пользы» от выбора направления на развилках с помощью эвристической функции. Этот метод ускоряет перебор.
4. Метод, основанный на графовой нейронной сети. При этом «обучаются» лишь представления отношений, в силу уникальности вершин. Такая нейросеть выбирает следующую путевую точку из некоторого множества, опираясь на траекторию пути, а также объекты на карте.

По итогам проведенного исследования наиболее перспективным представляется использование методов динамического построения маршрута и графовых нейросетей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пестун М. В. Методы построения навигационных описаний маршрутов для картографических компьютерных систем : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.11 / Пестун Максим Вадимович. Москва, 2015. 115 с.
- [2] Chen, H., Vasardani, M., Winter, S., Tomko, M. A Graph Database Model for Knowledge Extracted from Place Descriptions// ISPRS Int. J. Geo-Inf. 2018, 7(6), 221.
- [3] Belouaer, L., Brosset, D., Claramunt, C. From verbal route descriptions to sketch maps in natural environments// Proceedings of the 24th ACM SIGSPATIAL International Conference on Advances in Geographic Information Systems. 2016, pp. 1-10.

## **ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕАЛИЗАЦИИ ПОИСКА ФОРМУЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ**

**Корухова Юлия Станиславовна, Ступеньков Валерий Олегович**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: yulia@cs.msu.ru, s02230518@gse.cs.msu.ru

В современном мире значительное количество научных данных хранится в электронном виде, и для них создаются системы автоматизированного поиска информации. Несмотря на повсеместное распространение текстовых поисковых систем, задача подбора документов, содержащих искомую формулу, является по-прежнему актуальной: представляет интерес выполнение поиска не только точно соответствующих запросу математических выражений, но и

поиск как похожих формул, так и эквивалентных заданной в запросе. При поиске традиционными методами [1], эквивалентные запросу выражения могут получить низкую оценку сходства, поэтому в работе предложен подход, позволяющий интегрировать известные методы преобразования выражений с алгоритмом поиска.

Особенностью преобразования формул при поиске является ограничение по скорости работы методов: процесс сопоставления и преобразования математических выражений для запроса выполняется многократно и должен проводиться достаточно быстро, чтобы обеспечить ответ поисковой системы за приемлемое время. В ходе работы рассмотрены известные методы эквивалентных преобразований, и предложен алгоритм нечёткого поиска формул, использующий метод автоматического доказательства эквивалентности математических выражений с помощью волновых правил [2]. Процесс получения оценки тождественности формул заключается в унификации различий входных выражений и последующем направленном переборе правил преобразования для получения видоизменённых формул. Направленное доказательство продолжается до тех пор, пока не будет доказана тождественность или пока не останется ни одного применимого правила.

Использование алгоритма поиска, включающего доказательство эквивалентности математических выражений, обеспечивает более качественное упорядочение поисковой выдачи. Представленный метод позволяет приоритетно выделять документы, содержащие семантически похожие формулы, и исключать те, в которых математические формулы существенно отличаются.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корухова Ю. С., Кригер К. П., Рязанова Е. Б. Поиск документов по формулам // Научный сервис в сети Интернет: труды XXIV Всероссийской научной конференции (19–22 сентября 2022 г., онлайн). — М. : ИПМ им. М. В. Келдыша, 2022. — С. 350–362.
- [2] Bundy, A., Stevens, A., van Harmelen, F., Ireland, A. and Smaill, A. Rippling: A Heuristic for Guiding Inductive Proofs. // Artificial Intelligence, vol. 62, 1993, p. 185–253.

## **СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ПРОГРАММ НА ЯЗЫКЕ СИ**

**Новиков Михаил Дмитриевич**

Лаборатория вычислительного практикума и информационных систем, кафедра алгоритмических языков, МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: novikov\_57@mail.ru

На факультете ВМК МГУ с 2023 года разрабатывается система, предназначенная для тестирования программ на языке Си, выполняемых студентами вечернего отделения факультета ВМК МГУ в рамках практикума на ЭВМ.

Система разрабатывается по аналогии с двумя ранее созданными системами, предназначенными для тестирования программ, написанных на языках Паскаль и Ассемблер, соответственно. Задачи для тестирования взяты из книг [1] и [2].

Система проверяет правильность программ в автоматическом режиме, выполняя их для различных наборов исходных данных – как фиксированных, встроенных в систему заранее, так и генерируемых случайным образом в процессе тестирования; результаты сравниваются с эталонами.

Возможности системы следующие.

1. Можно тестировать как всю программу целиком, так и фрагмент программы.
2. Если по условию задачи программа должна содержать подпрограмму с заданными свойствами, то производится выделение этой подпрограммы из программы и отдельное ее тестирование.
3. Производится проверка выполнения в тестируемой программе предъявляемых к ней требований, указанных в [1] и [2].

Система написана в среде Delphi, может быть запущена на локальном компьютере и не требует выхода в Интернет. К настоящему времени разработаны тесты для примерно трёхсот задач из [1] и [2]. Пользователю предоставляется возможность выбора транслятора для своих программ. По умолчанию используется транслятор GCC.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пильшиков В.Н. Язык Паскаль. Упражнения и задачи. М.: Научный мир, 2003, 224 с.
- [2] Руденко Т.В. Сборник задач и упражнений по языку Си. (Учебное пособие для студентов II курса). М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ, 1999, 80 с.
- [3] Новиков М.Д. Программное обеспечение поддержки практикума на младших курсах факультета ВМК.: В сборнике «Ломоносовские чтения-2024: научная конференция, факультет ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова». Тезисы докладов.

## **ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ПО СТРОКАМ**

**Носов Анатолий Владимирович, Панфёров Антон Александрович**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: t.nosv2016@yandex.ru, panfaa@cs.msu.ru

Дифференциальные системы встречаются во многих областях. Решением такой системы является вектор, и в некоторых случаях не все компоненты вектора решений представляют интерес. Это приводит к задаче получения

частичного решения системы, т. е. построения не всех компонент вектора решений, а только *выделенных*.

Далее будем рассматривать системы вида:

$$A_1 y' + A_0 y = 0 \quad (1)$$

где  $A_1, A_0$  — полиномиальные матрицы из  $K[x]^{m \times m}$ , где  $K$  — некоторое поле характеристики 0 (например, поле рациональных или алгебраических чисел),  $A_1 \neq 0$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)^T$  — вектор неизвестных системы.

Задача построения частичных решений известна и решена для нормальных дифференциальных систем, т. е. систем вида  $y' = Ay$  [1]. Если  $A_1$  системы (1) вырождена, тогда система (1) называется *дифференциально-алгебраической*.

Пример дифференциально-алгебраической системы:

$$\begin{pmatrix} 0 & x & -2x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2x^2 - 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -x^2 \\ 1 & 2x & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 & x \end{pmatrix} y = 0, \quad (2)$$

где  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ . Здесь первые два уравнения являются дифференциальными, а последние два — алгебраическими.

Для построения частичных решений дифференциально-алгебраической системы её можно разделить на дифференциальную и алгебраическую системы; для этого существует множество алгоритмов. Для случая систем с выделенными неизвестными в работе [2] предложен алгоритм Extract.

Входом алгоритма Extract является *приведенная по строкам* система. Систему (1) можно переписать в виде  $Ly = 0$ , где  $L$  — операторная матрица с элементами из  $K[x][\partial]$ , где  $\partial = \frac{d}{dx}$  — оператор дифференцирования. Рассмотрение элементов операторной матрицы  $L$  как многочленов Ore [3] позволяет использовать алгоритмы для полиномиальных матриц; приведение по строкам может быть выполнено алгоритмом построения *слабой формы Попова* [4].

Алгоритм приведения к слабой форме Попова WPF из [5] является недетерминированным: из-за неоднозначного выбора порядка действий на разных шагах можно получать разные результаты. Управляя порядком действий можно получать более простые в некотором смысле результирующие матрицы.

Основной целью работы является разработка правил для управления порядком действий в алгоритме WPF и создание на базе этих правил эвристического алгоритма приведения системы вида (1) по строкам.

Одной из проблем компьютерной алгебры является проблема «разбухания коэффициентов», использование подобных эвристических правил может частично решить эту проблему.

В ходе работы были сформулированы критерии сравнения результирующих матриц, формализующие понятие «простоты», а также предложен набор эвристических правил для алгоритма WPF.



Эвристический алгоритм приведения операторных матриц по строкам на основе WPF с использованием разработанного набора правил был реализован в системе компьютерной алгебры Maple. Эксперименты показали, что в большинстве случаев применение эвристических правил позволяет получать существенно более простые результирующие матрицы. Таким образом, разработанный набор правил и эвристический алгоритм можно использовать в составе алгоритма Extract.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Абрамов С. А., Бронштейн М. Решение линейных дифференциальных и разностных систем по отношению к части неизвестных // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — № 2. — С. 229–241.
- [2] Панферов А. А. Системы дифференциальных уравнений с выделенной частью неизвестных // Программирование. — 2015. — № 2. — С. 26–36.
- [3] Ore O. Theory of non-commutative polynomials // Annals of mathematics. — 1933. — Т. 34. — №. 3. — С. 480-508.
- [4] Neiger V., Rosenkilde J., Solomatov G. Computing Popov and Hermite forms of rectangular polynomial matrices // Proceedings of the 2018 ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. — 2018. — С. 295-302.
- [5] Mulders T., Storjohann A. On lattice reduction for polynomial matrices // Journal of symbolic computation. — 2003. — Т. 35. — №. 4. — С. 377-401.

## ОЦЕНКА ОГРАНИЧЕНИЯ КАЧЕСТВА СИНТАКСИЧЕСКОГО РАЗБОРА КАЧЕСТВОМ ТОКЕНИЗАЦИИ

Шамаева Елена Денисовна

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: Derinhelm@yandex.ru

Для оценки качества работы синтаксических анализаторов используются тестовые выборки датасетов предложений с синтаксической разметкой, в которой для каждого токена (слова, знака препинания) задан главный токен и тип связи с ним. Однако на оценку качества синтаксического анализатора влияет также качество предварительной токенизации.

В данной работе<sup>1</sup> изучается влияние токенизатора на качество работы синтаксического анализатора для систем обработки текста UDPipe, Stanza, Natasha, DeepPavlov, spacy<sup>‡</sup> и датасетов SynTagRus, Taiga, Poetry, GSD, PUD.

Оценка синтаксического анализатора по метрике UAS (LAS) основана на доле токенов предложения, для которых верно определен главный токен (глав-

<sup>1</sup>Реализация исследования: [https://github.com/Derinhelm/parser\\_stat/tree/tokenization](https://github.com/Derinhelm/parser_stat/tree/tokenization).

<sup>‡</sup>Эти системы обработки текста предоставляют и токенизаторы, и синтаксические анализаторы.

ный токен и тип связи). Согласно [1], в качестве итоговой оценки используется F-мера соответствующей метрики, вычисляемая следующим образом:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{precision} + \frac{1}{recall})$ ,  $precision = \frac{right}{parser}$ ,  $recall = \frac{right}{gold}$ , где  $right$  – количество токенов с верной токенизацией и верно определенным главным токеном (главным токеном и типом связи),  $parser$  – количество токенов в наборе токенов, полученном с помощью токенизатора,  $gold$  – количество токенов в эталонном наборе.  $\frac{1}{F} = \frac{1}{2} * (\frac{parser}{right} + \frac{gold}{right}) = \frac{1}{2} * (\frac{parser+gold}{right})$ , то есть  $F = \frac{2*right}{parser+gold}$ ,  $right \leq right\_token$ , где  $right\_token$  – количество токенов, для которых верно проведена токенизация. Следовательно,  $F \leq \frac{2*right\_token}{parser+gold}$ . Данная оценка зависит только от качества токенизации и является ограничением сверху как для метрики UAS, так и для метрики LAS.

В Табл. 1 приведены верхние оценки качества работы анализатора, полученные данным способом, и процент предложений с несовпадением набора токенов. Для некоторых систем токенизатор существенно ограничивает качество синтаксического анализа: для анализатора DeepPavlov на датасете GSD верхняя оценка равна 0.9. На датасетах GSD, Poetry и Taiga для значительного количества предложений наблюдается несовпадение наборов токенов.

Представленный в данной работе подход вычисления верхней оценки качества синтаксического анализа позволяет определить, можно ли использовать определенный токенизатор для экспериментов с моделями синтаксического анализа, если необходимо достичь определенного уровня качества.

	GSD		PUD		SynTagRus		Poetry		Taiga	
	mean	%	mean	%	mean	%	mean	%	mean	%
UDPipe	0.941	35	0.977	17	0.997	3	0.940	34	0.934	26
Stanza	0.939	34	0.996	5	0.998	2	0.950	32	0.947	21
Natasha	0.954	20	0.993	6	0.989	8	0.986	5	0.953	19
DeepPavlov	0.907	17	0.996	4	0.989	8	0.982	10	0.942	24
spacy	0.960	25	0.986	13	0.985	13	0.979	11	0.959	18

Табл. 1: Верхние оценки качества синтаксических анализаторов и процент предложений с несовпадением токенизации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zeman D., Hajic J. Conll 2018 shared task: Multilingual parsing from raw text to universal dependencies // Proceedings of the CoNLL 2018 Shared Task: Multilingual Parsing from Raw Text to Universal Dependencies (Brussels, Belgium, 2018 г.). С. 1–21.

# **ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В МОДЕЛИ МНОГОФАКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ С ФУНКЦИОНАЛОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА С ДИСКОНТИРОВАНИЕМ И ИНТЕГРАНТОМ ТИПА ЛОГАРИФМ**

**Аввакумов Сергей Николаевич, Киселёв Юрий Николаевич, Орлов Михаил Владимирович, Орлов Сергей Михайлович**

Кафедра оптимального управления, e-mail: asn@cs.msu.su, kiselev@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su, sergey.orlov@cs.msu.su

Рассматривается  $n$ -мерная модель экономического роста с различными коэффициентами амортизации. Критерий качества характеризует интегральный объём потребления либо его полезность с учётом дисконтирования на бесконечном горизонте планирования. Изучается случай, когда начальное состояние системы находится на особом луче — специальном множестве, вид которого получен в аналитическом виде. Показано, что оптимальная траектория развивается во времени вдоль особого луча. Найдено соответствующее оптимальное управление. Основным аппаратом исследования является принцип максимума Понтрягина. С его помощью находятся экстремальные решения. Обоснование оптимальности полученного решения проводится с помощью теоремы о достаточных условиях в терминах конструкций принципа максимума, разработанной Ю.Н. Киселёвым.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1961.
- [2] Киселёв Ю. Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Материалы научного семинара «Математические модели в экономике и биологии». М. : МАКС Пресс, 2003. С. 57–67.
- [3] Ашманов С. А. Математические модели в экономике. М. : Изд-во МГУ, 1980.
- [4] Аввакумов С. Н., Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Тарасьев А. М. Задача максимизации прибыли для производственных функций Кобба-Дугласа // Нелинейная динамика и управление. Выпуск 5. М. : Физматлит. 2007. С. 309–350.
- [5] Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Исследование одной двухсекторной модели экономического роста с производственной функцией Кобба-Дугласа // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2010. N 2. С. 56–63.

- [6] Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией типа CES // Труды международной конференции «Динамика систем и процессы управления», посвящённой 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. УМЦ УПИ Екатеринбург. 2015. С. 220–227.

## О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МНИМЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Гончарова Марина Николаевна<sup>1</sup>, Прошкин Дмитрий Юрьевич, Самсонов Сергей Петрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, e-mail: m.gonchar@grsu.by

<sup>2</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: d-proshkin@mail.ru, samsonov@cs.msu.su

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_2 + v_1, \\ \dot{x}_2 = bx_1 + v_2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $b > 0$ , управление  $(v_1; v_2)$  является векторной кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения из компакта  $V$ . Множество  $V$  представляет собой четырехугольник с вершинами в точках  $C_i = (C_{i1}, C_{i2})$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Точка  $C_i$  располагается в  $i$ -четверти координатной плоскости, стороны четырехугольника  $V$  не параллельны осям координат.

Исследуется задача построения множества управляемости  $Y(t, t_1)$  объекта (1) в начало координат на интервале времени  $[t; t_1]$ . Для построения искомого множества вычислена опорная функция [1] множества управляемости, по которой множество восстанавливается однозначно в силу выпуклости. Получено, что при достаточно малых значениях длины временного интервала множество  $Y(t, t_1)$  ограничено дугами окружностей

$$\begin{aligned} & (x_1 - C_{i2} - C_{i+1,1} \sin \tau + C_{i+1,2} \cos \tau)^2 + \\ & + (x_2 + C_{i1} - C_{i+1,1} \cos \tau - C_{i+1,2} \sin \tau)^2 = \\ & = (C_{i1} - C_{i+1,1})^2 + (C_{i+1,2} - C_{i2})^2, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x_1 - C_{42} - C_{11} \sin \tau + C_{12} \cos \tau)^2 + (x_2 + C_{41} - C_{11} \cos \tau - C_{12} \sin \tau)^2 = \\ & = (C_{41} - C_{11})^2 + (C_{12} - C_{42})^2, \end{aligned}$$

где  $\tau = t_1 - t$ .

Полученный результат можно использовать для исследования поведения объекта (1) на больших временных интервалах, а также при наличии фазовых ограничений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М. : МАКС Пресс, 2007. 272 с.

## ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Григоренко Николай Леонтьевич<sup>1</sup>, Горьков Валерий Палович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: grigor@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Лаборатория обратных задач, e-mail: v-p-gorkov@yandex.ru

Рассматривается движение двух управляемых объектов ( $S$  и  $H$ ), описываемых уравнениями:

$$S : \begin{cases} \dot{x}_1 = V \cos(\phi), & x_1(0) = x_{10}, & x_1, x_2, \phi, u \in R^1, \\ \dot{x}_2 = V \sin(\phi), & x_2(0) = x_{20}, & V = \text{const} > 0, \\ \dot{\phi} = u, & \phi(0) = \phi_0, & \|u\| \leq \rho, \end{cases} \quad (1)$$

$$H : \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad y, v \in R^2, \quad \|v(t)\| \leq \sigma, \quad (2)$$

$y \in \Omega$ ,  $t > 0$ , где  $\Omega$  - выпуклое компактное множество на плоскости, в котором может перемещаться объект  $H$ . Объект  $S$  может перемещаться в  $R^3$ . Допустимые управления  $u(t), v(t)$  кусочно - непрерывные функции, удовлетворяющие ограничениям для  $t \geq 0$ . Предполагается, что объект  $S$  обнаруживает объект  $H$  в момент  $t$  в том и только в том случае, когда выполнено условие наблюдения  $(x(t), y(t)) \in M$ , где  $M$  - заданное множество в четырехмерном пространстве. Считается, что условие обнаружения имеет вид

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \ell. \quad (3)$$

Задача гарантированного поиска объектом  $S$  объекта  $H$  [1-3] состоит в нахождении начального вектора  $x(0) \in \Omega$ , числа  $T > 0$  и допустимого управления  $u(t)$  объекта  $S$  на отрезке  $[0, T]$ , для которых при любом начальном векторе  $y_0 \in \Omega$  и любом допустимом управлении  $v(t)$  объекта  $H$  на отрезке  $[0, T]$  гарантируется выполнение условия (3) в некоторый момент  $t \in [0, T]$ . Отметим, что объект  $S$  выбирает свое управление  $u$  опираясь лишь на априорную информацию (1) - (3), не имея информации ни о выбранном управлении  $v(t)$  объекта  $H$ , ни о его начальном и текущем фазовом состоянии. Объект  $H$  обладает полной информацией.

В докладе предложены достаточные условия на параметры  $V, \rho, \sigma, \ell$  игрового процесса (1)-(3), при которых существует решение задачи поиска объектом  $S$  объекта  $H$  за конечное время для множества  $\Omega$ , имеющего вид прямоугольника. Приведены управление игрока  $S$ , решающее задачу поиска и оценка сверху гарантированного времени окончания процесса поиска.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Меликян А. А. Черноусько Ф. Л. Некоторые минимаксные задачи управления с неполной информацией. // Прикл. математика и механика. 1971. Т.35, Вып.6.
- [2] Зеликин М. И. Об одной дифференциальной игре с неполной информацией // Докл. АН СССР, 1972, Т.202, N 5.
- [3] Петросян Л. А., Гарнаев А. Ю. Игры поиска. СПб.:Изд-во С.-Петербургского университета. 1992.

## К ЗАДАЧЕ КОНКУРЕНЦИИ ПРИ УЧЕТЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКОВ

**Жуковский Владислав Иосифович<sup>1</sup>, Жуковская Лидия Владиславовна<sup>2</sup>,  
Смирнова Лидия Викторовна, Бельских Юлия Анатольевна<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: zhkvlad@yandex.ru

<sup>2</sup> Центральный экономико-математический институт (ЦЭМИ) РАН, e-mail: zhukovskaylv@mail.ru

<sup>3</sup> Государственный гуманитарно-технологический университет, e-mail: smirnovalidiya@rambler.ru, belskihja@gmail.com

Рассматривается иерархическая модель задачи конкуренции двух фирм в условиях действия неопределенных факторов. Фирмы производят и поставляют на рынок продукцию одного вида. Обозначим  $u \in U$  — объем поставленной на рынок продукции 1-ой фирмы,  $x \in X$  — количество продукции реализуемой на рынке 2-ой фирмой. Кроме того, на рынок поступает продукция того же вида, произведенная компанией-импортером. Причем о количестве  $y \in Y$  поставляемого импорта, который играет роль неопределенности, известны лишь возможные границы. Примем следующие предположения:

1. каждая фирма продаст всю поставленную на рынок продукцию;
2. цена единицы продукции есть  $p(u, x, y) = a - b(u + x + y)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;
3. издержки на выпуск единицы продукции  $i$ -ой фирмы равны  $k_i > 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , причем суммарные затраты каждой фирмы линейно зависят от количества произведенной продукции;

4. принятие решения об объеме поставляемой продукции осуществляется участниками игры не одновременно. Вторая фирма получает информацию о количестве продукции, реализуемой первой фирмой, и с учетом этих сведений осуществляет выбор своей стратегии.

Математическую модель задачи конкуренции в условиях действия неконтролируемых факторов формализуем в виде иерархической игры при неопределенности

$$\Gamma = \langle U, X, Y, \{f_i(u, x, y)\}_{i \in \{1, 2\}} \rangle,$$

где  $U = [0, c_1]$ ,  $X = [0, c_2]$ ,  $Y = [0, d]$ ,  $c_i > 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $d > 0$ .

Принятие решений в игре  $\Gamma$  происходит следующим образом. Первый ход делает первый игрок (центр), который выбирает стратегию  $u \in U$ , желая максимизировать свою функцию выигрыша. Второй ход делают второй игрок (агент) и компания-импортер. Именно, они, независимо и одновременно выбирают стратегию  $x(u) \in X$  и неопределенность  $y \in Y$ . В результате формируется ситуация  $(u, x(u), y) \in U \times X \times Y$ , которая оценивается значением функции  $f_i(u, x, y) = (a - b(u + x + y))u - k_i u$  прибыли  $i$ -ой фирмы ( $i \in \{1, 2\}$ ).

Предлагается один из возможных подходов к формализации оптимального решения участника конфликта верхнего уровня (центра) с учетом рисков и сожалений [1, 2], а также отношения игрока нижнего уровня к риску. Рассмотрен случай, когда 1-го игрока нельзя считать рискофобом или рискофилом. А именно, данный игрок положительно относится к риску, но при выборе своей стратегии  $u \in U$ , стремится учесть оба подхода. В качестве решения этот игрок выбирает стратегию, которая обеспечит наименьшее значение суммы его риска по Вальду и сожаления по Сэвиджу.

С учетом иерархического характера игры  $\Gamma$ , в зависимости от отношения 2-го игрока (агента) к возможности риска определены два варианта принятия оптимального решения 1-ым игроком (центром) в данной игре, получены достаточные условия существования и найден их явный вид.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бардин А. Е., Житенева Ю. Н., Макаркина Т. В. Выбор равновесия в модели дуополии Курно // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем : Сборник научных трудов IX Международной школы-симпозиума АМУР-2015 (Севастополь, 12-21 сентября 2015 г.). Севастополь : Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, 2015. С. 31–35.
- [2] Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н., Смирнова Л. В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. М. : КРАСАНД, 2013. 368 с.

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОЖЕСТВ

Кулевский Александр Владиславович

Кафедра оптимального управления, e-mail: kulevskyav@cs.msu.ru

Доклад посвящен свойству комбинации операций линейного преобразования множества (умножения матрицы на множество) и сложения множеств в конечномерном пространстве. Выражения, содержащие такую комбинацию, применяются, в том числе, в некоторых методах решения дифференциальных игр. Приводятся обоснование свойства и характерный иллюстрирующий пример.

**1. Основные понятия и определения, постановка вопроса.** В пространстве  $R^n$  рассмотрим операции над множествами  $X, Y \subset R^n$ :

Сумма множеств  $X + Y = \{z \in R^n : z = x + y, x \in X, y \in Y\}$ .

Умножение множества на число  $\lambda X = \{z \in R^n : z = \lambda x, x \in X, \lambda \in R\}$ .

Линейное преобразование множества  $AX = \{z \in R^m : z = Ax, x \in X\}$ , здесь  $A_{m \times n}$  - заданная матрица.

Попробуем установить связь между множествами  $(A + B)X$  и  $AX + BX$ . Оказывается, вообще говоря, равенство не имеет места (пример в п.3), в общем случае справедливо лишь включение (см. п.2). Условия, гарантирующие в соотношении равенство, предполагают весьма бедный класс матриц.

**2. Свойство линейного преобразования множеств.** Доказана

**Теорема 1.** Для любых матриц  $A_{m \times n}, B_{m \times n}$  и произвольного множества  $X \subset R^n$  справедливо  $(A + B)X \subseteq AX + BX$ .

**3. Характерный пример к свойству.** В следующем примере для теоремы 1 равенства нет, а имеет место строгое включение  $(A + B)X \subset AX + BX$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, X = S_1(\theta)$$

**Замечание.** Известное равенство  $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$  для  $\alpha, \beta \geq 0$  и выпуклого  $X$  представимо в виде  $(A + B)X = AX + BX$ , где  $A = \alpha E, B = \beta E$ . Однако даже для квадратных положительно определенных матриц  $A, B$  и выпуклого  $X$  оно не гарантировано и, следовательно, согласно примеру, не обобщается рассмотренным в докладе свойством.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кулевский А. В. Об одном свойстве геометрической разности множеств // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2024. Т. 11, № 1. С. 76–80.

## О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ

Никольский Михаил Сергеевич

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, e-mail: mni@mi-ras.ru

Различные задачи отслеживания заданного движения с помощью траектории или проекции траектории управляемого объекта представляют значительный интерес для современной теории управления. Это, в частности, связано с тем, что желаемое движение не всегда строго осуществимо с помощью заданного управляемого объекта. В связи с этим возникает мысль о приближенном осуществлении заданного движения с помощью рассматриваемого управляемого



объекта. При этом важную роль играет выбор понятия близости траектории или ее проекции реального управляемого объекта от желаемого движения. Например, в монографиях [1,2] в качестве меры такой близости используется интегральная метрика. А в монографии [3] в параграфе 15 «Построение управлений в общей задаче динамики относительного движения» предлагается использовать близость управляемой траектории или ее проекции к желаемому движению в асимптотическом смысле при времени  $t$  стремящемся к бесконечности. Именно такой подход, в более частном виде, мы используем в нашей работе. В ней получены конструктивные достаточные условия, при которых осуществимо искомое асимптотическое отслеживание. Отметим, что в нашей работе, в отличие от монографии [3], аппарат функций Ляпунова не используется. Рассмотрен пример общего вида.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М. : Машиностроение, 1968, 764 с.
- [2] Егоров А.И. Основы теории управления. М. : Физматгиз, 2004, 506 с.
- [3] Зубов В.И. Проблема устойчивости процессов управления. С.-Петербург, 2001, 354 с.

## ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ 2h-DICE с ДВУМЯ ТИПАМИ ДОМОХОЗЯЙСТВ

Орлов Сергей Михайлович<sup>1</sup>, Ровенская Елена Александровна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления ВМК МГУ, Москва, и IIASA, Laxenburg Austria, e-mail: sergey.orlov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> IIASA, Laxenburg Austria, и Кафедра оптимального управления ВМК МГУ, Москва, e-mail: rovenska@iiasa.ac.at

Модель DICE (Dynamic Integrated Climate-Economy) [1] является моделью комплексной оценки, описывающей связь между экономической деятельностью и изменением климата. Она широко используется для анализа долгосрочных экономических последствий глобального потепления, социальной стоимости углерода и разработки стратегий сокращения выбросов парниковых газов.

Одним из ключевых допущений экономического блока модели является существование единого репрезентивного домохозяйства, обладающего как капиталом, так и трудовыми ресурсами. Однако такая однородность подвергается критике, особенно в контексте справедливого распределения последствий климатических изменений среди различных социальных групп [2].

В данном докладе представлена модификация модели DICE, 2h-DICE, учитывающая неоднородность домохозяйств. В новой версии модели выделяются два типа агентов: домохозяйства, обладающие капиталом и трудовыми ре-

сурсами (рикардианские домохозяйства), и домохозяйства, владеющие только трудовыми ресурсами и получающие доход от заработной платы.

В исследовании анализируются различные сценарии с двумя типами домохозяйств. Рассматриваются оптимизационные задачи рикардианских домохозяйств, а также задачи социального планировщика, стремящегося к справедливому распределению потребления. В численном исследовании выявлено, что стратегии рикардианских домохозяйств приводят к недостаточному уровню сокращения выбросов парниковых газов. При этом в различных сценариях социального планировщика уровень пиковой температуры поверхности Земли может быть даже ниже, чем в оригинальной DICE модели.

Рассматривается возможность использования дополнительных финансовых инструментов, таких как трансферты между домохозяйствами и специальные соглашения о совместных выплатах между домохозяйствами, с целью достижения приемлемых уровней снижения выбросов в случае оптимизации рикардианских домохозяйств.

Исследования проведены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nordhaus, W., Sztorc, P. DICE 2013R: Introduction and User's Manual. 2013. 102 pp.
- [2] Emmerling, J., Tavoni, M. Representing inequalities in integrated assessment modeling of climate change // One Earth. 2021. Vol. 4, Issue 2. P./,177–180.

## **ДВУХЭТАПНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРЫ ЛЕЧЕНИЯ РАКОВОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ**

**Хайлов Евгений Николаевич**

Кафедра оптимального управления, e-mail: khailov@cs.msu.ru

Пациентам с диагностированным раком простаты, у которых развиваются метастазы или возникает рецидив, требуется дополнительная гормональная терапия, основанная на непрерывном приеме максимально переносимой дозы лекарства. Такое лечение быстро уничтожает лекарственно-чувствительные раковые клетки (ЛЧРК) и меняет конкуренцию между ЛЧРК и лекарственно-устойчивыми раковыми клетками (ЛУРК) в пользу последних. Поэтому в организме пациента начинают доминировать ЛУРК, и применяемая терапия оказывается неэффективной. Новым направлением в лечении рака простаты является прерывистая терапия. Она позволяет значительному количеству ЛЧРК выжить за счет временных перерывов в приеме лекарства. В результате эти

клетки подавляют деление ЛУРК благодаря конкуренции за общие ограниченные ресурсы.

В настоящее время в рамках прерывистой терапии пациенту предлагается циклическая терапевтическая схема, призванная регулировать общее количество раковых клеток во время лечения. Каждый из циклов разделен на два периода – дозирования и отмены. Период дозирования сопровождается приемом лекарства и нацелен на уменьшение уровня ПСА (простато-специфического антигена, используемого в качестве биомаркера заболевания). Во время периода отмены лекарство пациентом не принимается, а уровень ПСА, наоборот, увеличивается. В течение периода дозирования популяция ЛЧРК сокращается, поскольку прием лекарства приводит к подавлению деления этих клеток, снижая конкурентное давление на ЛУРК. Поэтому число последних увеличивается. Напротив, в период отмены популяция ЛЧРК растет. Это увеличивает конкурентное давление на ЛУРК, что приводит к сокращению их популяции. Исходя из этого, для одного заданного цикла терапевтической схемы, описываемой с помощью управляемой математической модели конкуренции Лотки-Вольтерры, которая определяет взаимодействие между ЛЧРК и ЛУРК, а также содержит управляющую функцию, отвечающую за переход от периода дозирования к периоду отмены и наоборот, представляет определенный интерес постановка и изучение задачи оптимального управления, оптимальное решение которой повторяло бы особенности этой схемы. Этому и посвящен настоящий доклад.

# Авторский указатель

- Chen Jiulong, 126  
Smirnov S. N., 126  
Абдрахманова В. Т., 143  
Абдулаев С. Ю., 70  
Абрамов В. Г., 167  
Аввакумов С. Н., 186  
Аветисян А. И., 145  
Акользин В. В., 149  
Акопян А. А., 148  
Алексеев Г. С., 80  
Андреев В. Ф., 31  
Андреева Е. В., 56  
Антоненко В. А., 85  
Ануприенко Д. В., 27  
Арбузов П. А., 66  
Арефьев В. А., 159  
Аристов А. И., 16  
Артемяева Л. А., 40  
Арутюнов А. В., 113  
Бабенко М. А., 48  
Баев А. В., 57  
Бажитов С. Д., 58  
Балашов В. В., 82  
Бегишев Р. Р., 115  
Белеванцев А. А., 163, 166  
Белеванцев А. А., 146  
Белюсова Н. М., 23  
Бельских Ю. А., 189  
Беляев М. В., 155  
Белянкин Г. А., 67  
Богомоллов И. В., 145, 156  
Богомоллов С. В., 36  
Борисенко О. Д., 159  
Бородин А. Е., 146, 166  
Бочкарев С. В., 59  
Буничева А. Я., 39  
Вабищевич П. Н., 24  
Васильев Ю. А., 107  
Васин А. А., 69, 70  
Васянин О. А., 113  
Виляев А. Л., 92  
Волканов Д. Ю., 83  
Волков А. П., 177  
Волкова И. А., 168  
Воропай Е. С., 170  
Вылиток А. А., 171–173  
Высикайло Ф. И., 41  
Гайсарян С. С., 148, 149  
Гайфутдинова Ф. Х., 149  
Галустов А. Л., 146  
Герелюк И. С., 179  
Гетьман А. И., 151, 152  
Глушко А. А., 71  
Го Фэнжуй, 84  
Говердовский М. В., 107  
Голембиовский Д. Ю., 66, 72  
Головаш Д. Р., 151  
Головизнин В. М., 33  
Головин И. Г., 174  
Гончарова М. Н., 187  
Горбунов А. В., 31  
Горбунов М. А., 49  
Горохов О. Е., 103  
Горшенин А. К., 92–94  
Горьков В. П., 188  
Григоренко Н. Л., 188  
Гришина Е. Р., 49

- Груздева Н. В., 170  
Гугучкин Е. П., 161  
Двоеглазов Р. А., 108  
Дементьев Н. С., 26  
Денисов А. М., 59  
Денисова Н. И., 122  
Дмитриев Л. В., 136  
Дорофеев А. В., 176  
Достовалова А. М., 93  
Дряженков А. А., 40  
Е Цзыхао, 72  
Егоренков В. А., 34  
Еленин Г. Г., 35  
Еленина Т. Г., 35  
Емельянов Д. П., 16  
Ерёмин Ю. А., 62  
Ечкина Е. Ю., 23  
Желтков Д. А., 52  
Жидкова Ю. М., 94  
Жилин В. А., 27  
Жуков А. С., 78  
Жуков К. А., 130, 131, 134  
Жуковская З. Т., 116  
Жуковская Л. В., 189  
Жуковский В. И., 189  
Жуковский С. Е., 116  
Забелло М. А., 67  
Задорожная Ю. А., 136  
Замарашкин Н. Л., 48  
Зарипов А. Р., 174  
Захаров В. Б., 177, 178  
Захарова Т. В., 95, 97, 101  
Зотов И. В., 26  
Зув К. П., 22  
Игнатъев В. Н., 153, 155  
Измаилов А. Ф., 76  
Измаилов П. А., 71  
Ильин А. В., 115  
Ильин И. К., 87  
Ильющин Е. А., 138  
Индычко О. И., 60  
Калинин Г. М., 145  
Каменщиков М. А., 117  
Капитонова А. П., 88  
Капырин И. В., 27  
Карпулевич Е. А., 161  
Касимов Р. Р., 173  
Кирнева Н. А., 31  
Киселёв Ю. Н., 186  
Клименко В. К., 95  
Королев В. Ю., 84  
Королев В. Ю., 98  
Королев Ю. М., 39  
Корухова Л. С., 143, 156  
Корухова Ю. С., 179, 180  
Коршунов Д. М., 60  
Кочетов Е. В., 39  
Краснопольский Б. И., 130, 131  
Крицков Л. В., 17, 19  
Крылов П. А., 125  
Кудрявцев А. А., 100  
Кузнецов Е. Д., 20  
Кулагин И. И., 158  
Кулевский А. В., 190  
Куприй Р. М., 130  
Куренной Д. С., 78  
Курмангалеев Ш. Ф., 148, 149  
Курячий Г. В., 88  
Куц Д. О., 163  
Лазухин И. С., 104  
Лапонин В. С., 41  
Ларичев А. В., 58  
Леонов Е. А., 36  
Ли Цзямянь, 171  
Ложкин С. А., 110  
Ломоносова В. Е., 138  
Лопушенко В. В., 62  
Лысаков И. В., 139  
Любимов А. М., 85  
Мальчевский С. А., 82  
Манушин Д. В., 164  
Маркин И. В., 133

- Матвеев А. Д., 131  
Матвеев С. А., 50  
Машечкин И. В., 103, 104  
Медведев А. И., 53  
Милешин А. Д., 87  
Мокин А. Ю., 37, 40  
Молотилов Н. Н., 167  
Морозов В. В., 79  
Морозов С. В., 159  
Мостяев А. И., 178  
Му Цзинъюань, 172  
Мухин С. И., 39  
Мяо Цзясюань, 50  
Некрасов Н. В., 17  
Ненахов Н. Д., 37  
Никольский И. М., 132  
Никольский М. С., 191  
Никонов М. В., 28  
Новиков М. Д., 181  
Новодережкин В. В., 41  
Носов А. В., 182  
Нутфуллин Б. М., 136  
Обросова Н. К., 120, 128  
Орлов М. В., 186  
Орлов С. М., 186, 192  
Осипчук А. А., 88  
Павельева Е. А., 56  
Панов Д. Д., 153  
Панов П. В., 97  
Панфёров А. А., 182  
Парастаев Г. С., 118  
Пасконова Л. В., 106  
Пахнушев А. В., 26  
Пеструилова А. Н., 161  
Петровский М. И., 103, 104, 107  
Петухов А. А., 140  
Писковский В. О., 87, 91  
Подымов В. В., 112  
Полякова И. Н., 176  
Попко Ф. Д., 43  
Попов М. В., 152  
Применко Э. А., 139  
Протасов А. В., 168  
Прошкин Д. Ю., 187  
Рагозина П. И., 155  
Радаева К. В., 39  
Разгулин А. В., 58  
Рахуба М. В., 49  
Ровенская Е. А., 192  
Романов М. М., 158  
Романов С. И., 79  
Романова Ю. А., 19  
Романюк Н. Р., 98  
Русол А. В., 133  
Рыбакова А. А., 120  
Рыжаков Д. В., 31  
Рыжов А. П., 108, 109  
Рябченков В. М., 83  
Савенкова Н. П., 37, 40, 41  
Савидов Г. А., 163  
Савушкин Е. В., 101  
Савчук А. М., 20  
Садовничая И. В., 22  
Самсонов С. П., 187  
Санкина П. А., 148  
Саносян Г. А., 70  
Сапожников К. Э., 37  
Сергеев М. Д., 110  
Сержантов А. В., 33  
Сеченых И. И., 90  
Ситников А. В., 140  
Складчиков С. А., 41  
Смелянский Р. Л., 80, 84, 90  
Смирнов А. П., 27  
Смирнова Л. В., 189  
Соловьев М. А., 164  
Сорокин К. С., 143  
Степаненко В. М., 53, 55  
Степанов Е. П., 80  
Степанов И. А., 151, 152  
Столяров Р. К., 156  
Ступеньков В. О., 180

- Субботин Д. Н., 166  
Сукманюк С. В., 52  
Сычугов Д. Ю., 31  
Тихвинский Д. Г., 64  
Трофимов В. А., 34, 64, 65  
Тулин Д. И., 156  
Турдаков Д. Ю., 161  
Файкин Г. М., 53  
Федотов М. В., 64  
Фомичев В. В., 122, 123  
Фурсов А. С., 125  
Хайлов Е. Н., 193  
Харитонов Д. М., 65  
Хвостиков А. В., 60  
Хохлов Ю. С., 102  
Хруленко А. Б., 43  
Хуан Чжанжуньлун, 79  
Цехмистер А. А., 164  
Цыбиков Т. В., 178  
Цыганов Н. И., 69, 70  
Чебанова А. М., 128  
Чернов А. В., 106  
Чижов И. В., 142  
Шагов В. С., 112  
Шамаева Е. Д., 184  
Шананин А. А., 118  
Шангареева С. К., 53, 55  
Шейнов А. В., 32  
Шергин И. А., 109  
Шестаков О. В., 100  
Шимчик Н. В., 153  
Широков И. А., 44  
Шишкин А. Г., 28, 32  
Шобухов А. В., 46  
Шпигун И. К., 91  
Шутова К. Ю., 123  
Юань Д., 134  
Янь Чжибай, 76

Научное издание  
Научная конференция  
**ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ**  
Тезисы докладов  
24 марта – 4 апреля 2025

Подготовка оригинал-макета:  
Издательский отдел  
Факультета вычислительной математики и кибернетики  
МГУ имени М. В. Ломоносова  
Лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.  
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,  
МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус

Публикуется в авторской редакции  
Издательство ООО «МАКС Пресс».  
Лицензия ИД N00510 от 01.12.99 г.  
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,  
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.  
Тел. 8(495)939–3890/91. Тел./Факс 8(495)939–3891.

Подписано в печать 21.03.2025 г.  
Формат 60х90 1/16. Усл.печ.л. 12,5.  
Тираж 100 (1–8) экз. Заказ 041.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»  
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,  
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н.